

# サプライヤーと製造業者による価格競争を考慮した マルチリーダー・ワンフォロワーゲーム

成 島 康 史                      平 野 達 也

## 1. はじめに

サプライチェーンマネジメントは企業経営におけるキーファクターとして、近年注目が高まっている。製品の原材料の購入から、顧客への販売まで全てのプロセスを含むサプライチェーンでは、複数の企業が密接に絡み合っており、各主体の要求する事柄も異なるため、非常に複雑な状況となる。そのため、そのような状況を分析するために、サプライチェーンにおける数理モデルは古くから盛んに研究されてきた。

複数の企業を含むような大きなサプライチェーンでは、しばしば企業間で競合が生じることがある。そのような競合状態における均衡状態の分析も盛んであり、ゲーム理論などの均衡分析を用いて、様々な研究がされてきた。例えば、Nagurney et al. (2002) はサプライチェーンネットワーク均衡モデルを提案した。サプライチェーンネットワーク均衡モデルでは、複数の製造業者と小売業者と市場により構成されるネットワークについて、均衡状態における製品の流通量や価格について分析が行われている。その後、サプライチェーンネットワーク均衡モデルを拡張したモデルがいくつか提案されている（例えば、Dong et al. (2004), Li and Nagurney (2015), 平野・成島 (2017) など）。サプライチェーンネットワーク均衡モデルは各主体間の意思決定のタイミングを考慮しない戦略型の均衡モデルであるが、各主体間で意思決定のタイミングが異なる均衡モデルをリーダー・フォロワーゲームとして扱ったモデルもいくつかある。DeMiguel and Xu (2009) は、同一製品を取り扱う複数の企業から成る寡占市場での競合状態を分析している。彼らのモデルでは各プレイヤーは同じ立場ではあるが、先に意思決定を行うプレイヤーがリーダー、後から意思決定を行うプレイヤーがフォロワーとなる。さらに、各プレイヤーは自身の利得関数を確率的最適化するものとしてその状況をシュタッケルベルグ競争としてモデル化した上で分析を行っている。一方、Ang. et al. (2012) は、複数のサプライヤーと一つの製造業者から成る競合モデルの分析を行っている。具体的には、製品を送送するサプライヤーが、製品の配送の頻度を決定することで利益を最大化する一方で、製造業者は各サプライヤーに対する発注量の比率を決定することで費用を最小化する。さらにサプライヤーの問題は、変分不等式問題に定式化し均衡解を求めることができることを示した。しかしながら、Ang. et al. のモデルでは、製品の価格はパラメータとして扱われている。通常、製品の価格はサプライチェーン内の物の流れを考えるうえで、重要な要因であり、価格の競合を考えることで、より有用

な分析が可能である。したがって、本研究では、Ang et al. が提案したモデルをもとに、価格競争を考慮したサプライチェーンでの競合状態について分析する。

## 2. 準備

本節では、次節以降の議論のために必要となる定義や定理などについて述べる。

### 2.1 点集合写像

定義2.1 二つの集合  $\Pi \subseteq \mathbb{R}^n, \Gamma \subseteq \mathbb{R}^m$  に対して、 $\Gamma$  の各点  $\gamma$  に  $\Pi$  のある部分  $A(\gamma)$  集合を対応させる写像を  $\Gamma$  から  $\Pi$  への点-集合写像という。  $\Pi$  のべき集合を  $P(\Pi)$  とすると、 $A: \Gamma \rightarrow P(\Pi)$  と表される。

定義2.2 点-集合写像  $A$  と二つの集合  $\Pi \subseteq \mathbb{R}^n, \Gamma \subseteq \mathbb{R}^m$  について、点  $\bar{\gamma} \in \Gamma$  の適当な近傍  $U \subseteq \Gamma$  に対して集合  $\cup_{\gamma \in U} A(\gamma) \subseteq \Pi$  が有界となると、点-集合写像  $A$  は  $\bar{\gamma}$  のまわりで一様有界であるという。

定義2.2に関して、もし集合  $\Pi$  自身が有界であれば、 $A: \Gamma \rightarrow P(\Pi)$  が任意の  $\bar{\gamma} \in \Gamma$  のまわりで一様有界あることは、簡単に確認できる (例えば、[14]を参照)。以下では関数、 $h_j: \mathbb{R}^n \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R} (j = 1, \dots, l)$ 、と  $\Gamma$  の各点  $\gamma$  に対して、点-集合写像  $B$  が以下のような式で与えられている場合を考える：

$$B(\gamma) = \{\pi \in \mathbb{R}^n \mid h_j(\pi, \gamma) \leq 0, j = 1, \dots, l\}. \quad (2.1)$$

この点-集合写像  $B$  の連続性について以下の定理が成り立つ。

定理2.1 [福島 (2001)]  $\mathbb{R}^n$  のべき集合を  $P(\mathbb{R}^n)$  とする。式(2.1)の点-集合写像  $B: \Gamma \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$  は  $\bar{\gamma} \in \Gamma$  のまわりで一様有界であり、関数  $h_j: \mathbb{R}^n \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R} (j = 1, \dots, l)$  は  $\mathbb{R}^n \times \{\bar{\gamma}\}$  において連続かつ  $\gamma \in \Gamma$  を任意に固定したとき  $\pi$  に関して凸関数であるとする。このとき  $h_j(\pi^0, \bar{\gamma}) < 0 (j = 1, \dots, l)$  を満たす  $\pi^0 \in \mathbb{R}^n$  が存在するならば、 $B$  は  $\bar{\gamma}$  において連続である。

### 2.2 一般化ナッシュ均衡問題

$n$  人のプレイヤーによる非協力ゲームを考える。各プレイヤーは、自身のコスト関数の値を最小化するように戦略を決定するものと仮定する。このとき、 $i = 1, \dots, n$  に対して、

$m_i$ : プレイヤー  $i$  が決定する戦略の次元

$x^i \in \mathbb{R}^{m_i}$ : プレイヤー  $i$  が決定する戦略

$x$ : 全てのプレイヤーの戦略の組, すなわち  $(x^1, \dots, x^n)^T$

$x^{-i}$ : プレイヤー  $i$  以外のプレイヤーの戦略の組, すなわち  $(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)^T$

$m$ : 全てのプレイヤーの戦略の次元の合計, すなわち  $\sum_{j=1}^n m_j$

$m_{-i}$ : プレイヤー  $i$  以外のプレイヤーの戦略の次元の合計, すなわち  $m - m_i$

$K^i(x^{-i}) \subset \mathbb{R}^{m_i}$ : プレイヤー  $i$  の戦略集合

$\theta_i(x^{-i}, x^i): \mathbb{R}^{m_{-i}} \times \mathbb{R}^{m_i} \rightarrow \mathbb{R}$ : プレイヤー  $i$  のコスト関数

と定義する. ここでプレイヤー  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) の戦略集合が  $K^i(x^{-i})$  ( $i = 1, \dots, n$ ) と表記されることは, 各プレイヤーの戦略集合が他のプレイヤーの戦略に依存することを意味しており,  $\theta_i(x^{-i}, x^i)$  は, プレイヤー  $i$  のコスト関数が, 自分と他のプレイヤーの戦略に依存することを意味している.

このゲームにおいてプレイヤー  $i$  が解くべき問題は,

$$\begin{aligned} \min_{x^i \in \mathbb{R}^{m_i}} \theta_i(x^{-i}, x^i) \\ \text{s.t. } x^i \in K^i(x^{-i}), \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.2)$$

となる. これを一般化ナッシュ均衡問題と呼び, すべての  $i$  に対して,  $x^{*,i}$  が (2.2) の解となっているとき,  $\mathbf{x}^* = (x^{*,1}, \dots, x^{*,n})^T$  を一般化ナッシュ均衡と呼ぶ. 通常のナッシュ均衡問題においては各プレイヤーの戦略集合は他のプレイヤーの戦略には依存しないが, 一般化ナッシュ均衡問題では依存するため, 均衡解を求めるのは通常のナッシュ均衡問題よりも難しい問題となる.

### 2.3 準変分不等式問題

$S \subseteq \mathbb{R}^m$  を空でない閉凸集合とする. ベクトル値写像  $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  に対して, 次のように定義される問題を変分不等式問題という (例えば, Facchinei and Pang (2003), 福島 (2001) などを参照).

$$\text{find } \mathbf{x} \in S \quad \text{s.t. } F(\mathbf{x})^T(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{z} \in S.$$

この変分不等式問題において,  $S$  が  $\mathbf{x}$  に依存するとき, 準変分不等式問題という. つまり準変分不等式問題は次のように定義される問題である (例えば, Facchinei et al. (2014) を参照).

$$\text{find } \mathbf{x} \in S(\mathbf{x}) \quad \text{s.t. } F(\mathbf{x})^T(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{z} \in S(\mathbf{x}). \quad (2.3)$$

次に準変分不等式問題 (2.3) の解の存在性の定理を与えておく.

定理2.2 [Facchinei et al. (2014)] 関数  $F$  は連続であるとする. さらに次の (i), (ii) を満たすコンパクトな凸集合  $V \neq \emptyset$  が存在するとする.

- (i) 任意の  $\mathbf{x} \in V$  に対して,  $S(\mathbf{x})$  は空でない閉凸集合であり,  $S(\mathbf{x}) \subseteq V$  が成り立つ.
- (ii) 点-集合写像  $S$  は  $V$  上で連続である.

このとき, 準変分不等式問題 (2.3) は少なくとも 1 つの解を持つ.

ユークリッド空間上の集合は, 有界閉ならばコンパクトである.  $S \subseteq \mathbb{R}^m$  であるから,  $S$  は有界かつ閉であればコンパクトといえる. ここで,  $S(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n S^j(x^{-j})$  とする. ただし,  $S^i(x^{-i})$ ,  $i = 1, \dots, n$  は, 関数  $g_j^i: \mathbb{R}^{m_i} \rightarrow \mathbb{R}^{h_i}$ ,  $j = 1, \dots, c$ ,  $i = 1, \dots, n$  と, 関数  $q_k^i: \mathbb{R}^{m-i} \times \mathbb{R}^{m_i} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $k = 1, \dots, d$ ,  $i = 1, \dots, n$  を用いて次のように表されるものとする.

$$S^i(x^{-i}) = \{y^i \mid g_j^i(y^i) \leq 0, q_k^i(x^{-i}, y^i) \leq 0, \quad j = 1, \dots, c, \quad k = 1, \dots, d\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

ここで,  $g_j(\mathbf{y}) = (g_j^1(y^1), \dots, g_j^n(y^n))^T$  ( $j = 1, \dots, c$ ),  $g(\mathbf{y}) = (g_1(\mathbf{y}), \dots, g_c(\mathbf{y}))^T$ ,  $q_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (q_k^1(x^{-1}, y^1), \dots, q_k^n(x^{-n}, y^n))^T$  ( $k = 1, \dots, d$ ),  $q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (q_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), q_d(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^T$  とおけば,  $S(\mathbf{x})$  は次の通りに表せる.

$$S(\mathbf{x}) = \{ \mathbf{y} \mid g(\mathbf{y}) \leq \mathbf{0}, q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} \}.$$

$\mathbf{y}$  と  $S(\mathbf{x})$ ,  $x^i$  と  $S^i(x^{-i})$ ,  $i = 1, \dots, n$  において以下の関係が成り立つことは容易に確認できる.

$$y^i \in S^i(x^{-i}) \Leftrightarrow y \in S(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

### 3. マルチリーダー・ワンフォロワーゲームの定式化

#### 3.1 各プレイヤーの最適化問題の定式化

本節では、複数のサプライヤーとひとつの製造業者によるサプライチェーン上の競合について考える。まず、Ang. et al. (2012) に倣いモデルを構築する。サプライヤーと製造業者は互いにサプライチェーンの上流と下流の関係に位置しており、サプライヤーは自身が製造した製品を製造業者に配送し、製造業者はその製品を受け取り、顧客に販売する。各サプライヤーは製造業者に製品を配送し売り上げることによって利益を得る。Ang. et al. が構築したモデルでは、各サプライヤーは製品の配送頻度のみを決定することで利益を最大にすると仮定されていたが、本研究では、サプライヤーは配送頻度に加えて製品価格も決定すると仮定する。一方、製造業者は、各サプライヤーへの製品の発注量の比率を決定することで、製品の仕入れと在庫費用の合計を最小化する。

以上の問題をモデル化するにあたり、変数とパラメータを与える。サプライヤーの数を  $n$  とし、 $i = 1, \dots, n$  について、変数とパラメータを以下のように定義する：

変数：

$r_i$  : サプライヤー  $i$  の製造業者への製品の配送頻度

$p_i$  : サプライヤー  $i$  が発送する製品の単位価格

$\lambda_i$  : 製品の総需要量に対するサプライヤー  $i$  の配送量 (受注量) の割合

パラメータ：

$D (> 0)$  : 製品の総需要量

$h (> 0)$  : 製造業者の製品 1 単位あたりの在庫保管コスト

$c_i (> 0)$  : サプライヤー  $i$  の製品製造単位コスト

$c_i (> 0)$  : サプライヤー  $i$  の一回あたりの配送にかかる製造固定コスト

$e_i (> 0)$  : サプライヤー  $i$  の製品配送単位コスト

$E_i (> 0)$  : サプライヤー  $i$  の一回あたりの配送にかかる配送固定コスト

$l (> 0)$  : 各サプライヤーの配送頻度の下限

$u (> l)$  : 各サプライヤーの配送頻度の上限

$a (> c_i + e_i)$  : 各サプライヤーが配送する製品の価格の下限

$b (> a)$  : 各サプライヤーが配送する製品の価格の上限

$r_i$  と  $p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) はサプライヤー  $i$  の決定変数であり、 $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は製造業者の決定変数である。また総需要量  $D$  は、モデル上のサプライヤーのみによって満たされると仮定する。 $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は総需要量  $D$  に対するサプライヤー  $i$  の総配送量の割合であるから、 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ 、 $\lambda_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) である。 $l, u, a, b$  はそれぞれ全サプライヤーに関して共通の値を与える。

上流ではサプライヤー同士の競合・意思決定が行われる。下流ではひとつの製造業者による意思決定が行われる。各サプライヤー間では、情報の共有が一切行われず、相手の意思決定を予測したうえで、自分の戦略を決定する、と仮定する。また、先にサプライヤーが戦略を決定し、

製造業者はサプライヤーの戦略に反応して自分の戦略を決定する。したがってリーダーはサプライヤー、フォロワーは製造業者となり、このモデルは複数のサプライヤー間の競合と、ひとつの製造業者による意思決定から構築される、二段階の非協力ゲームとみなすことができる (図3.1を参照)。このようなゲームでは、リーダーが複数存在し、フォロワーがひとつであるので、マルチリーダー・ワンフォロワーゲームと呼ばれる。

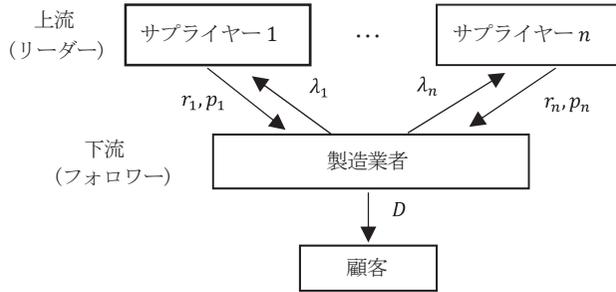


図3.1：モデルのイメージ図

次に、ゲームの定式化を行う。まず、各サプライヤーの利益を考える。サプライヤー  $i$  の利得関数  $\Phi_i (i = 1, \dots, n)$  をとする。サプライヤー  $i$  の総配送量  $\lambda_i D$  はであり、製品の1単位あたりの売り上げは  $p_i$ 、費用は  $c_i + e_i$  である。一回の配送でかかる固定費用が  $C_i + K_i$  で、配送頻度が  $r_i$  であるときの固定費用の合計は  $(C_i + E_i)r_i$  となるから、 $\Phi_i$  は、

$$\Phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) = (p_i - c_i - e_i)\lambda_i D - (C_i + E_i)r_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

となる。ただし、 $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^T$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$  である。

次に、製造業者の費用について考える。製造業者は経済的発注量の論理 (Ha et al. (2003) を参照) に従って在庫を管理すると仮定する。このとき、製造業者がサプライヤー  $i$  から受け取る製品の在庫保管費用は  $\frac{h\lambda_i^2}{2r_i} D (i = 1, \dots, n)$  となる。また、サプライヤー  $i$  から受け取る製品の価格の合計は  $p_i \lambda_i D$  となる。したがって、サプライヤー  $i$  との取引における製造業者の費用は合計で、 $(p_i \lambda_i + \frac{h\lambda_i^2}{2r_i}) D$  となるから、すべてのサプライヤーとの取引における製造業者の費用関数は

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j=1}^n \left( p_j \lambda_j + \frac{h\lambda_j^2}{2r_j} \right) D \quad (3.2)$$

となる。以上より、サプライヤーの解く問題は、利得関数(3.1)を最大にする問題であるから、

$$\max_{r_i, p_i} \Phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) \quad \text{s.t.} \quad l \leq r_i \leq u, \quad a \leq p_i \leq b, \quad i = 1, \dots, n$$

となる。これを以下の最小化問題

$$\min_{r_i, p_i} -\Phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) \quad \text{s.t.} \quad l \leq r_i \leq u, \quad a \leq p_i \leq b, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

に書き換えておく。一方、製造業者が解く問題は、費用関数(3.2)を最小にする問題であるから、

$$\min_{\boldsymbol{\lambda}} \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

となる。これでマルチリーダー・ワンフォロワーゲームが定式化された。

### 3.2 準変分不等式問題への再定式化とその解の存在性

次に定式化されたゲームを、準変分不等式問題へと再定式化する。フォロワーは製造業者であるから、最初に製造業者の問題(3.4)を考える。製造業者の目的関数  $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \lambda)$  は  $\lambda$  に対して狭義凸2次関数であるから、唯一解が存在し、以下で与えられる。

定理3.1 [Ang et al. (2012)] 最適化問題(3.4)の最適解  $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$  は以下で与えられる：

$$\lambda_i^* = \frac{r_i}{\sum_{j=1}^n r_j} \left( 1 + \frac{1}{h} \sum_{j=1}^n r_j (p_j - p_i) \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

次にフォロワーの問題の解(3.5)をリーダーの問題(3.3)に代入して、リーダーの問題を変形する。ここで、(3.4)の制約条件から、 $\lambda_i^* = \frac{r_i}{\sum_{j=1}^n r_j} \left( 1 + \frac{1}{h} \sum_{j=1}^n r_j (p_j - p_i) \right) \geq 0 (i = 1, \dots, n)$  であるが、 $\frac{r_i}{\sum_{j=1}^n r_j} > 0$  より、 $1 + \frac{1}{h} \sum_{j=1}^n r_j (p_j - p_i) \geq 0$  すなわち  $\sum_{j=1}^n r_j (p_i - p_j) - h \leq 0$  が得られる。よって、フォロワーの決定変数  $r_i, p_i$  について、 $\sum_{j=1}^n r_j (p_i - p_j) - h \leq 0 (i = 1, \dots, n)$  という制約が課される。この制約を考慮して、(3.5)を(3.3)に代入すると、問題(3.3)は、

$$\begin{aligned} \min_{r_i, p_i} -\Phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= -\frac{(p_i - c_i - e_i)Dr_i}{\sum_{j=1}^n r_j} \left\{ 1 + \frac{1}{h} \sum_{j=1}^n r_j (p_j - p_i) \right\} + (C_i + E_i)r_i \\ \text{s.t. } l &\leq r_i \leq u, \quad a \leq p_i \leq b, \quad \sum_{j=1}^n r_j (p_i - p_j) - h \leq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

と書き直すことができる。

プレイヤー  $i$  の戦略を  $x^i = (r_i, p_i)^T (i = 1, \dots, n)$  とし、プレイヤー  $i$  以外のプレイヤーの戦略の組を  $x^{-i} = (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)^T (i = 1, \dots, n)$  とすると、各制約は、

$$\begin{aligned} g_1^i(x^i) &= l - r_i \leq 0, \quad g_2^i(x^i) = r_i - u \leq 0, \quad g_3^i(x^i) = a - p_i \leq 0, \quad g_4^i(x^i) = p_i - b \leq 0, \\ q^i(x^{-i}, x^i) &= \sum_{j=1}^n r_j (p_i - p_j) - h = p_i \sum_{j=1}^n r_j - \sum_{j=1}^n r_j p_j - h \leq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる。 $q^i(x^{-i}, x^i) (i = 1, \dots, n)$  は各プレイヤーの戦略集合が他のプレイヤーの戦略にも依存することを意味しているので、リーダーによるゲームは一般化ナッシュ均衡問題とみなせる。ここで、プレイヤー  $i$  の戦略集合を  $K^i \in \mathbb{R}^2$  とすると、これは他のプレイヤーの戦略に依存し、 $K^i = K^i(x^{-i})$  と表記され、次式を得る：

$$K^i(x^{-i}) = \{ x^i \mid g_1^i(x^i) \leq 0, g_2^i(x^i) \leq 0, g_3^i(x^i) \leq 0, g_4^i(x^i) \leq 0, q^i(x^{-i}, x^i) \leq 0 \}, \quad i = 1, \dots, n.$$

利得関数も他のプレイヤーの戦略に依存するから、 $\Phi_i = \Phi_i(x^{-i}, x^i) (i = 1, \dots, n)$  となる。したがって、(3.3) - (3.4)のマルチリーダー・ワンフォロワーゲームは以下の一般化ナッシュ均衡問題に再定式化できる：

$$\begin{aligned} \min_{x^i} -\Phi_i(x^{-i}, x^i) \\ \text{s.t. } x^i \in K^i(x^{-i}), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.7)$$

ここで、(3.7)の各プレイヤーが解く最適化問題の最適性条件は以下で与えられる：

$$\nabla_{x^i} \Phi_i(x^{*-i}, x^{*,i})^T (x^i - x^{*,i}) \geq 0, \quad \forall x^i \in K^i(x^{*-i}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.8)$$

相手の戦略  $x^{-i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  を任意に固定すると、 $g_1^i(x^i), g_2^i(x^i), g_3^i(x^i), g_4^i(x^i), q^i(x^{-i}, \cdot)$ ,  $i = 1, \dots, n$  は、 $x^i$ ,  $i = 1, \dots, n$  に関して線形であるので、 $K^i(x^{-i})$  は凸集合となる。よって、もし  $-\Phi_i(x^{-i}, \cdot)$  が、 $x^i$  に関して凸関数であるとき、各プレイヤーの解く問題は凸計画問題となるため、この時、最適性条件(3.8)は(3.7)の解であるための必要十分条件となる。

以下では、一般化ナッシュ均衡問題(3.7)を準変分不等式問題へと再定式化する。全てのプレイヤーの問題(3.7)の解の組を  $x \in \mathbb{R}^{2n}$  とし、 $K(x) = \prod_{j=1}^n K^j(x^{-j})$  とする。さらに  $y = (y^1, \dots, y^n)^T$ ,  $y^i = (\eta_i, \rho_i)^T$ ,  $i = 1, \dots, n$  とし、各プレイヤーの戦略と自分以外のプレイヤーの戦略を区別させるために

$$K^i(x^{-i}) = \{y^i \mid g_1^i(y^i) \leq 0, g_2^i(y^i) \leq 0, g_3^i(y^i) \leq 0, g_4^i(y^i) \leq 0, q^i(x^{-i}, y^i) \leq 0\}, \quad i = 1, \dots, n$$

と記す。  $g_j(y) = (g_j^1(y^1), \dots, g_j^n(y^n))^T$ ,  $j = 1, \dots, 4$ ,  $g(y) = (g_1(y), \dots, g_4(y))^T$ ,  $q(x, y) = (q^1(x^{-1}, y^1), \dots, q^n(x^{-n}, y^n))^T$  とおけば、

$$K(x) = \{y \mid g(y) \leq 0, q(x, y) \leq 0\}$$

と表せる。ここで、 $K(x)$  は  $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  の点-集合写像である。また、 $y^i$  と  $K^i(x^{-i})$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $y$  と  $K(x)$  において以下の関係が成り立つ。

$$y^i \in K^i(x^{-i}) \Leftrightarrow y \in K(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

よって、(3.7)の最適性条件(3.8)は以下の準変分不等式問題

$$\text{find } x \in K(x) \quad \text{s.t. } F(x)^T(z - x) \geq 0, \quad \forall z \in K(x) \quad (3.9)$$

に帰着させることができる。ただし、 $F(x) = (-\nabla_{y^1} \Phi_1(x^{-1}, x^1), \dots, -\nabla_{y^n} \Phi_n(x^{-n}, x^n))^T$ ,

$$\nabla_{y^i} \Phi_i(x^{-i}, x^i) = \left( \frac{\partial \Phi_i(x^{-i}, x^i)}{\partial \eta_i}, \frac{\partial \Phi_i(x^{-i}, x^i)}{\partial \rho_i} \right)^T, \quad i = 1, \dots, n \text{ である。}$$

準変分不等式問題(3.9)は最適性条件(3.8)と等価であるため、準変分不等式問題(3.9)は一般化ナッシュ均衡問題(3.7)の解の必要条件となる。一般に、準変分不等式問題(3.9)の解は一般化ナッシュ均衡問題(3.8)の停留点となっているため、停留一般化ナッシュ均衡と呼ばれる (Fu and Fukushima (2015) を参照)。

### 3.3 均衡解の存在性

本節では準変分不等式問題(3.9)の解の存在性について示す。まず、点-集合写像  $K$  の連続性について証明する。

命題3.1 準変分不等式問題(3.9)において、点-集合写像  $K$  は連続である。

証明.  $T = \{y \mid l - \eta_i \leq 0, \eta_i - u \leq 0, a - \rho_i \leq 0, \rho_i - b \leq 0, i = 1, \dots, n\}$  とする。このとき  $K(x) \subseteq T$  が成り立つが、 $T$  は有界であるから、点-集合写像  $K$  は任意の  $x$  のまわりで一様有界である。上述の通り、 $K$  に含まれる関数  $g_1^i(y^i), g_2^i(y^i), g_3^i(y^i), g_4^i(y^i), q^i(x^{-i}, y^i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は、 $x^{-i}$  を任意に固定すると凸関数であり、かつ連続である。ここで  $g_j^i(y^i) < 0$ ,  $j = 1, \dots, 4$ ,

$i = 1, \dots, n$  とすると,  $l - \eta_i < 0, \eta_i - u < 0, a - \rho_i < 0, \rho_i - b < 0, i = 1, \dots, n$  となる.  $l < u, a < b$  より,  $l - \eta_i < 0, \eta_i - u < 0, a - \rho_i < 0, \rho_i - b < 0$  を満たすような  $y^i$ , すなわち  $l < \eta_i < u, a < \rho_i < b$  を満たす  $\eta_i, \rho_i (i = 1, \dots, n)$  が存在することは明らかである. また  $q^i(x^{-i}, \cdot) < 0 (i = 1, \dots, n)$  とすると,  $\rho_i \sum_{j \neq i}^n r_j - \sum_{j \neq i}^n p_j r_j - h < 0$  となる. ここで  $\sum_{j \neq i}^n r_j, \sum_{j \neq i}^n p_j r_j (i = 1, \dots, n)$  は任意に固定されていることに注意. ここで,  $\sum_{j \neq i}^n r_j > 0 (i = 1, \dots, n)$  より,

$$\rho_i < \frac{\sum_{j \neq i}^n p_j r_j + h}{\sum_{j \neq i}^n r_j}, \quad i = 1, \dots, n$$

が得られる. よって  $a < \rho_i < b$  かつ  $\rho_i < \frac{\sum_{j \neq i}^n p_j r_j + h}{\sum_{j \neq i}^n r_j}$  を満たす  $\rho_i (i = 1, \dots, n)$  が存在することを示せばよい.

まず,  $a \leq p_i$  より  $\frac{\sum_{j \neq i}^n p_j r_j + h}{\sum_{j \neq i}^n r_j} > \frac{a \sum_{j \neq i}^n r_j + h}{\sum_{j \neq i}^n r_j} = a + \frac{h}{\sum_{j \neq i}^n r_j} > a$  となるので, まず  $a < \frac{\sum_{j \neq i}^n p_j r_j + h}{\sum_{j \neq i}^n r_j}$

$(i = 1, \dots, n)$  が得られる. 以下では  $b \leq \frac{\sum_{j \neq i}^n p_j r_j + h}{\sum_{j \neq i}^n r_j}$  と,  $\frac{\sum_{j \neq i}^n p_j r_j + h}{\sum_{j \neq i}^n r_j} < b$  の2つの場合に分けて考える.

(I)  $b \leq \frac{\sum_{j \neq i}^n p_j r_j + h}{\sum_{j \neq i}^n r_j} (i = 1, \dots, n)$  となる場合

$a < b, a < \frac{\sum_{j \neq i}^n p_j r_j + h}{\sum_{j \neq i}^n r_j}$  より,  $a < b \leq \frac{\sum_{j \neq i}^n p_j r_j + h}{\sum_{j \neq i}^n r_j} (i = 1, \dots, n)$  が得られる. よって, ある  $\rho_i^0$  に対し,

$a < \rho_i^0 < b$  が満たされていれば,  $\rho_i^0 < \frac{\sum_{j \neq i}^n p_j r_j + h}{\sum_{j \neq i}^n r_j}$  も成り立つ.

(II)  $\frac{\sum_{j \neq i}^n p_j r_j + h}{\sum_{j \neq i}^n r_j} < b (i = 1, \dots, n)$  となる場合

$a < b, a < \frac{\sum_{j \neq i}^n p_j r_j + h}{\sum_{j \neq i}^n r_j}$  より,  $a < \frac{\sum_{j \neq i}^n p_j r_j + h}{\sum_{j \neq i}^n r_j} < b (i = 1, \dots, n)$  が得られる. よって, ある  $\rho_i^0$  に対して,

$a < \rho_i^0 < \frac{\sum_{j \neq i}^n p_j r_j + h}{\sum_{j \neq i}^n r_j}$  が満たされていれば,  $\rho_i^0 < b$  も成り立つ.

(I), (II) より,  $a < \rho_i < b$  かつ  $\rho_i < \frac{\sum_{j \neq i}^n p_j r_j + h}{\sum_{j \neq i}^n r_j}$  を満たすような  $\rho_i (i = 1, \dots, n)$  が存在する.

したがって, 点-集合写像  $K$  は定理2.1を満たすので, 連続である. ■

次に, 準変分不等式問題(3.9)が解を持つことを示す.

定理3.2 準変分不等式問題(3.9)は少なくとも1つの解を持つ.

証明. 集合  $T = \{y \mid l - \eta_i \leq 0, \eta_i - u \leq 0, a - \rho_i \leq 0, \rho_i - b \leq 0, i = 1, \dots, n\}$  を考える.

$l < u, a < b$  であるので、 $T$  は空でない。また  $T$  は有界閉集合であるから、コンパクトである。また、 $T$  が凸集合であることも容易に示せる。

次に、準変分不等式問題(3.9)について定理2.2の(i)が成り立つことを証明する。まず任意の  $x \in T$  に対して、 $K(x)$  が空でない閉凸集合であることを示す。 $x \in T$  を任意に固定したとき、 $K(x)$  に対する制約は  $g_1^i(y^i) \leq 0, \dots, g_4^i(y^i) \leq 0, q^i(x^{-i}, \cdot) \leq 0 (i = 1, \dots, n)$  であったが、命題3.1の証明より、 $g_1^i(y^i) < 0, \dots, g_4^i(y^i) < 0, q^i(x^{-i}, \cdot) < 0$  を満たす  $y^i (i = 1, \dots, n)$  が存在するので、 $g_1^i(y^i) \leq 0, \dots, g_4^i(y^i) \leq 0, q^i(x^{-i}, \cdot) \leq 0$  を満たす  $y^i (i = 1, \dots, n)$  も明らかに存在する。よって  $K(x)$  は空ではない。また、 $K(x)$  が閉集合であることも自明である。

次に、 $K(x)$  が凸集合であることを示す。 $\forall y_0, \forall y_1 \in K(x)$  とし、の凸結合にそれぞれ含まれる任意の2要素  $\rho_i^0, \rho_i^1$  の凸結合  $(1-\zeta)\rho_i^0 + \zeta\rho_i^1, i = 1, \dots, n, 0 \leq \zeta \leq 1$  について考える。 $y_0, y_1$  は、 $T$  に属するから、 $q^i(x^{-i}, y^i) \leq 0, i = 1, \dots, n$  と(3.6)より、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n r_j(\rho_i^0 - p_j) - h &= \rho_i^0 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r_j p_j - h < 0, \\ \sum_{j=1}^n r_j(\rho_i^1 - p_j) - h &= \rho_i^1 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r_j p_j - h < 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} (1-\zeta)\rho_i^0 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r_j - (1-\zeta) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r_j p_j - (1-\zeta)h &\leq 0, \\ \zeta\rho_i^1 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r_j - \zeta \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r_j p_j - \zeta h &\leq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

が得られる。これより、

$$\begin{aligned} (1-\zeta)\rho_i^0 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r_j - (1-\zeta) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r_j p_j - (1-\zeta)h + \zeta\rho_i^1 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r_j - \zeta \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r_j p_j - \zeta h &\leq 0 \\ \{(1-\zeta)\rho_i^0 + \zeta\rho_i^1\} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r_j p_j - h &\leq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

となる。したがって、制約  $q^i(x^{-i}, \cdot) i = 1, \dots, n$  に対して、 $\rho_i^0, \rho_i^1$  の凸結合  $(1-\zeta)\rho_i^0 + \zeta\rho_i^1$  も満たしている。また、 $T$  が凸集合であることの証明と同様に考えれば、 $K(x)$  に属する任意の2点の凸結合がその他の制約を満たしていることがわかる。よって、定義2.2より、 $K(x)$  は凸集合である。

また、明らかに  $K(x) \subseteq T$  が成り立つ。したがって、準変分不等式問題(3.9)について定理2.2の条件(i)が成り立つ。さらに命題3.1より、点-集合写像  $K(x)$  は連続であるので、準変分不等式問題(3.9)は定理2.2の条件(ii)を満たす。ゆえに定理2.2が成り立つので、準変分不等式問題(3.9)は少なくとも一つの解を持つ。 ■

前節で述べたように、準変分不等式問題(3.9)は一般化ナッシュ均衡問題(3.7)の停留一般化ナッシュ均衡となっている。よって、以下の系が得られる。

系 3.3 一般化ナッシュ均衡問題(3.7)は少なくとも一つの停留一般化ナッシュ均衡を持つ。

### 3.4 無制約最適化問題への再定式化

次に準変分不等式問題(3.9)の解を求める方法について考える。準変分不等式問題(3.9)のKKT条件は以下のとおりとなる(例えば, Dreves et al. (2012)を参照)。

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) + \nabla g(\mathbf{x})\boldsymbol{\mu} + \nabla_y q(\mathbf{x}, \mathbf{x})\boldsymbol{\xi} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\mu} &\geq \mathbf{0}, g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu}^T g(\mathbf{x}) = 0 \\ \boldsymbol{\xi} &\geq \mathbf{0}, q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}^T q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

ただし,  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)^T$ ,  $\mu_j = (\mu_j^1, \dots, \mu_j^n)^T$ ,  $j = 1, \dots, 4$ ,  $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \dots, \xi^n)^T$ である。以下では, KKT条件(3.10)を満たす $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi})$ を求める方法を述べる。まず関数 $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi})$ を次のように定義する。

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}) := F(\mathbf{x}) + \nabla g(\mathbf{x})\boldsymbol{\mu} + \nabla_y q(\mathbf{x}, \mathbf{x})\boldsymbol{\xi}.$$

このとき, KKT条件(3.10)は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{0} \\ \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

ただし,

$$\Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}) := \begin{pmatrix} \omega(\mu_1^1, -g_1^1(x^1)) \\ \vdots \\ \omega(\mu_1^n, -g_1^n(x^n)) \\ \omega(\mu_2^1, -g_2^1(x^1)) \\ \vdots \\ \omega(\mu_2^n, -g_2^n(x^n)) \\ \omega(\mu_3^1, -g_3^1(x^1)) \\ \vdots \\ \omega(\mu_3^n, -g_3^n(x^n)) \\ \omega(\mu_4^1, -g_4^1(x^1)) \\ \vdots \\ \omega(\mu_4^n, -g_4^n(x^n)) \\ \omega(\xi^1, -q^1(x^{-1}, x^1)) \\ \vdots \\ \omega(\xi^n, -q^n(x^{-n}, x^n)) \end{pmatrix}, \quad \omega(\alpha, \beta) := (\alpha + \beta) - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

と定義する。関数 $\omega: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ はFischer-Burmeister関数と呼ばれる(Facchiney et al. (2003)を参照)。ここで, Fischer-Burmeister関数 $\omega(\alpha, \beta)$ が以下の性質を持つことは簡単に確認できる:

$$\omega(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha\beta = 0.$$

したがって,  $\omega(\alpha, \beta) = 0$ であることと $\alpha$ と $\beta$ が相補性条件を満たすことは同値となる。ここで,  $\omega(\alpha, \beta)$ は点 $(0, 0)$ においては微分不可能であることを注意しておく。

一方,  $F(\mathbf{x}) = \left( -\frac{\partial \Phi_1(x^{-1}, x^1)}{\partial \eta_1}, -\frac{\partial \Phi_1(x^{-1}, x^1)}{\partial \rho_1}, \dots, -\frac{\partial \Phi_n(x^{-n}, x^n)}{\partial \eta_n}, -\frac{\partial \Phi_n(x^{-n}, x^n)}{\partial \rho_n} \right)^T$ であるが,

$$-\frac{\partial \phi_i(x^{-i}, x^i)}{\partial \eta_i} = \frac{(p_i - c_i - e_i) D \sum_{j=1}^n r_j}{h(\sum_{j=1}^n r_j)^2} \left\{ h + \sum_{j=1}^n r_j (p_j - p_i) \right\} - (C_i + E_i),$$

$$-\frac{\partial \phi_i(x^{-i}, x^i)}{\partial \rho_i} = \frac{Dr_i}{h \sum_{j=1}^n r_j} \left\{ h + \sum_{j=1}^n r_j (p_j - p_i) - (p_i - c_i - e_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r_j \right\}, \quad i = 1, \dots, n$$

となるので,

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{(p_1 - c_1 - e_1) D \sum_{j=1}^n r_j}{h(\sum_{j=1}^n r_j)^2} \left\{ h + \sum_{j=1}^n r_j (p_j - p_1) \right\} + (C_1 + E_1) \\ -\frac{Dr_1}{h \sum_{j=1}^n r_j} \left\{ h + \sum_{j=1}^n r_j (p_j - p_1) - (p_1 - c_1 - e_1) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n r_j \right\} \\ \vdots \\ -\frac{(p_n - c_n - e_n) D \sum_{j=1}^n r_j}{h(\sum_{j=1}^n r_j)^2} \left\{ h + \sum_{j=1}^n r_j (p_j - p_n) \right\} + (C_n + E_n) \\ -\frac{Dr_n}{h \sum_{j=1}^n r_j} \left\{ h + \sum_{j=1}^n r_j (p_j - p_n) - (p_n - c_n - e_n) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^n r_j \right\} \end{pmatrix}$$

となる。また,

$$\nabla g(\mathbf{x})\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} -\mu_1^1 + \mu_2^1 \\ -\mu_3^1 + \mu_4^1 \\ \vdots \\ -\mu_1^n + \mu_2^n \\ -\mu_3^n + \mu_4^n \end{pmatrix},$$

$$\nabla_y q(\mathbf{x}, \mathbf{x})\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n r_j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n r_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^n r_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^1 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n r_j \\ \vdots \\ 0 \\ \xi^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^n r_j \end{pmatrix}$$

である。したがって,

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}) = \left( \begin{array}{l} -\frac{(p_1 - c_1 - e_1)D \sum_{j=1}^n r_j}{h(\sum_{j=1}^n r_j)^2} \left\{ h + \sum_{j=1}^n r_j(p_j - p_1) \right\} + (C_1 + E_1) - \mu_1^1 + \mu_1^2 \\ -\frac{Dr_1}{h \sum_{j=1}^n r_j} \left\{ h + \sum_{j=1}^n r_j(p_j - p_1) - (p_1 - c_1 - e_1) \sum_{j=1}^n r_j \right\} - \mu_3^1 + \mu_4^1 + \xi^1 \sum_{j=1}^n r_j \\ \vdots \\ -\frac{(p_n - c_n - e_n)D \sum_{j=1}^n r_j}{h(\sum_{j=1}^n r_j)^2} \left\{ h + \sum_{j=1}^n r_j(p_j - p_n) \right\} + (C_n + E_n) - \mu_n^1 + \mu_n^2 \\ -\frac{Dr_n}{h \sum_{j=1}^n r_j} \left\{ h + \sum_{j=1}^n r_j(p_j - p_n) - (p_n - c_n - e_n) \sum_{j=1}^n r_j \right\} - \mu_3^n + \mu_4^n + \xi^n \sum_{j=1}^n r_j \end{array} \right)$$

となる。また、 $i = 1, \dots, n$  に対して、

$$\omega(\mu_1^i, -g_1^i(\mathbf{x})) = \omega(\mu_1^i, -l + r_i) = \mu_1^i - l + r_i - \sqrt{(\mu_1^i)^2 + (-l + r_i)^2}$$

であり、同様に、

$$\omega(\mu_2^i, -g_2^i(\mathbf{x})) = \mu_2^i - r_i + u - \sqrt{(\mu_2^i)^2 + (-r_i + u)^2}$$

$$\omega(\mu_3^i, -g_3^i(\mathbf{x})) = \mu_3^i - a + p_i - \sqrt{(\mu_3^i)^2 + (-a + p_i)^2}$$

$$\omega(\mu_4^i, -g_4^i(\mathbf{x})) = \mu_4^i - p_i + b - \sqrt{(\mu_4^i)^2 + (-p_i + b)^2}$$

$$\omega(\xi^i, -q^i(\mathbf{x})) = \xi^i - \sum_{j=1}^n r_j(p_i - p_j) + h - \sqrt{(\xi^i)^2 + \left( -\sum_{j=1}^n r_j(p_i - p_j) + h \right)^2}$$

となる。

次にメリット関数  $\Theta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi})$  を以下の通りに定義する:

$$\Theta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}) := \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}) \\ \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \right\|^2.$$

ただし、 $\left\| \begin{pmatrix} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}) \\ \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \right\|$  はベクトル  $\begin{pmatrix} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}) \\ \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix}$  の2ノルムを意味している。  $\Theta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}) \geq 0$  であるが、 $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi})$  が  $\Theta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$  を満たすならば、 $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$  かつ  $\Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$  であるので、KKT条件(3.10)が成り立つ。よって、準変分不等式問題(3.9)は以下の制約なしの最小化問題として再定式化される。

$$\min_{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi})} \Theta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}) \tag{3.11}$$

ここで Fischer-Burmerster関数は微分不可能であるが、メリット関数  $\Theta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi})$  は微分可能である。したがって、無制約最適化問題 (3.11) は準ニュートン法などの汎用的な数値解法が適用可能であることを注意しておく。

## 4. 数値実験

### 4.1 実験の概要

前節で定式化した最小化問題(3.11)を、MATLABのソルバーlsqnonlinで解くことで数値実験を行った。lsqnonlinは非線形最小二乗問題を解くためのソルバーである。

本実験では、総務省の日本標準産業分類(2015)を参考に、サプライヤーの業種が「処理牛乳・乳飲料製造業(0913)」のときと「自動車製造業(3111)」の2種類の場合を想定して、それぞれの場合でパラメータを設定して実験を行った(ただし、()内の数字は日本標準産業分類に記載されている各業種の項目番号)。すべての実験において、サプライヤー $n$ の数を2とし、それぞれをサプライヤー1、サプライヤー2と記す。サプライヤー1に関するパラメータは常に固定とし、サプライヤー2の製品1単位あたりの製造コストと輸送コストの和 $c_2 + e_2$ (以下、「単位コスト」と記す)と、一回の配送にかかる製造コストと配送コストの和 $C_1 + E_2$ (以下、「固定コスト」と記す)が、それぞれ変化する場合を想定し、実験を行った。さらに両サプライヤーに対するパラメータを固定した上で、製造業者の在庫費用と総需要がそれぞれ変化する場合についても実験を行った。

今回の実験では、単位コスト( $c_2 + e_2$ )が変化するケースと、固定コスト( $C_1 + E_2$ )が変化するケースの2通りの実験を行い、それぞれの結果をグラフにまとめた。実験で得られた解には\*を付加して表す。また、図ではサプライヤー $i$ ( $i = 1, 2$ )の一回の配送量を $W_i$ と表している。価格やコストに関する値の単位は基本的には日本円としているが、そうではない場合は但し書きを加えた。なお、実験により得られた値が、両サプライヤーとも等しいときは、図内のグラフが重なっていることを注意しておく。

### 4.2 処理牛乳・乳飲料製造業の場合

#### 4.2.1 単位コストが変化した場合

$D = 10000, h = 50, l = 0.7, u = 4, a = c_2 + e_2 + 1, b = 270, C_1 + E_1 = C_2 + E_2 = 50000$ とする。 $c_1 + e_1 = 160$ と固定し、 $c_2 + e_2$ を160から260まで10ずつ増やして実験を行った。図4.1-4.3では実験結果をグラフにまとめている。

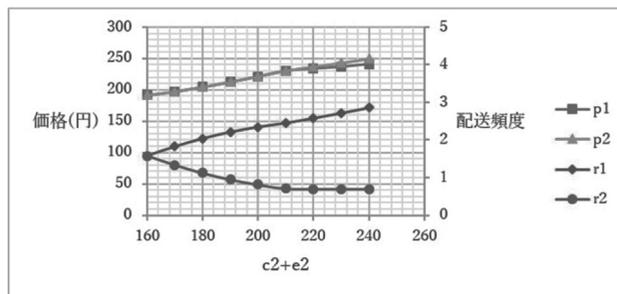


図4.1：価格と配送頻度

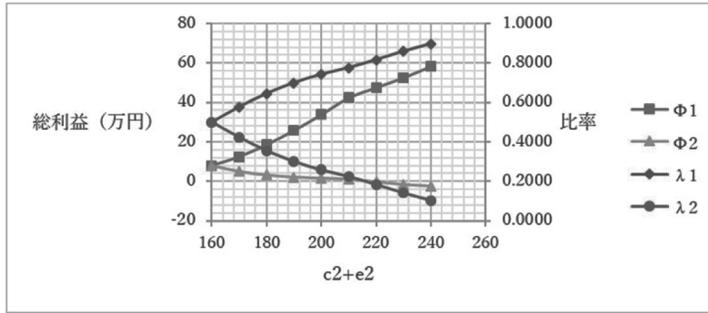


図4.2：サプライヤーの受注量の比率と総利益

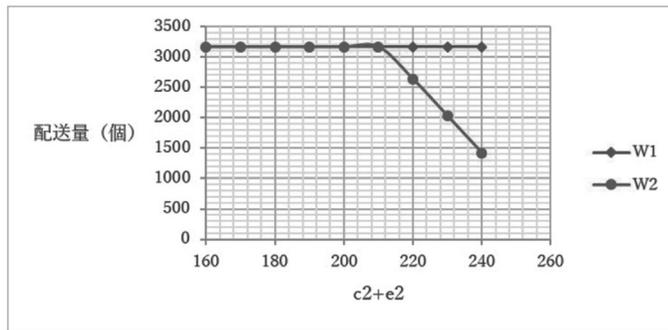


図4.3：一回の配送量

各変数が上限・下限値に達しない状況では、 $p_1^* = p_2^*$ となっている。また、 $c_2 + e_2 \geq 220$ のとき、 $r_2^*$ が下限値に達し、 $p_1^* > p_2^*$ となる。 $c_2 + e_2 \geq 240$ になると、数値実験では解が求まらなかった。 $c_2 + e_2$ の増加に伴い、 $\lambda_1^*, \phi_1$ は増加し、 $\lambda_2^*, \phi_2$ は減少する。変数が上限・下限値に達しないときは、常に $W_1 = W_2$ であるが、上限・下限値に達すると、 $W_1$ は変化しないものの、 $W_2$ は減少していく。

4.2.2 固定コストが変化した場合

$D = 10000, h = 50, l = 0.7, u = 4, a = 190, b = 200, c_1 + e_1 = c_2 + e_2 = 160$ とする。 $C_1 + E_1 = 50000$ と固定し、 $C_2 + E_2$ を50000から100000まで5000ずつ増やして実験を行った。図4.4-4.6では実験結果をグラフにまとめている。

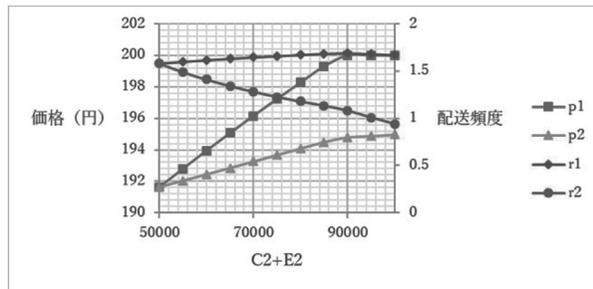


図4.4：配送頻度と価格

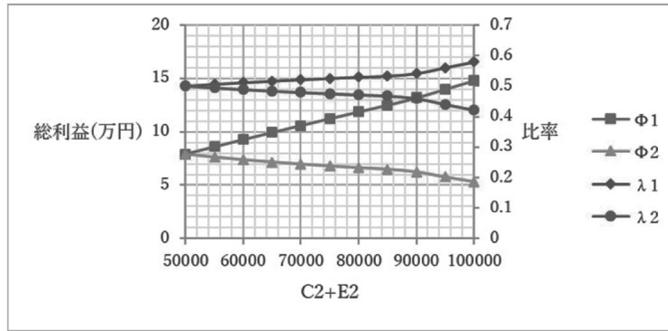


図4.5：サプライヤーの受注量の比率と総利益

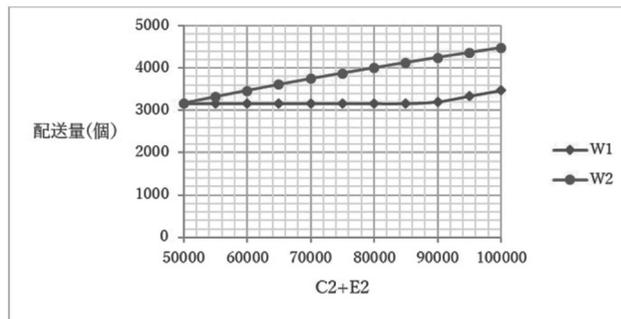


図4.6：一回の配送量

$C_2 + E_2$  の増加に伴い,  $r_1^*, p_1^*, p_2^*$  は増加し,  $r_2^*$  は減少する. しかし  $C_2 + E_2$  が90000以上になると,  $p_1^*$  が上限に達し, それ以降はわずかながら  $r_1^*$  は下がる現象がみられた. また,  $\lambda_1^*, \phi_1$  は増加し,  $\lambda_2^*, \phi_2$  は減少する.  $p_1^*$  が上限に達するまでは  $W_1$  は4.2.1節のときと同じ値であるが,  $W_2$  は減少する傾向がある. また  $p_1^*$  が上限に達すると,  $W_1$  は増加する傾向が見られた.

### 4.3 自動車製造業の場合

日本標準産業分類に従えば, 自動車製造業には二輪自動車の製造も含まれるが, 当実験では, 二輪自動車の製造は対象から外した.  $p_i^*, c_i + e_i, C_i + E_i, h (i = 1, \dots, 2)$  の単位はそれぞれ万円,  $\phi_1, \phi_2$  の単位は百万円である.

#### 4.3.1 単位コストが変化した場合

$D = 100000, h = 30, l = 2, u = 20, a = c_2 + e_2 + 1, b = 250, C_1 + E_1 = C_2 + E_2 = 9000$  とする.  $c_1 + e_1 = 200$  と固定し,  $c_2 + e_2$  を200から220まで2ずつ増やして実験を行った. 図4.7-4.9では実験結果をグラフにまとめている.

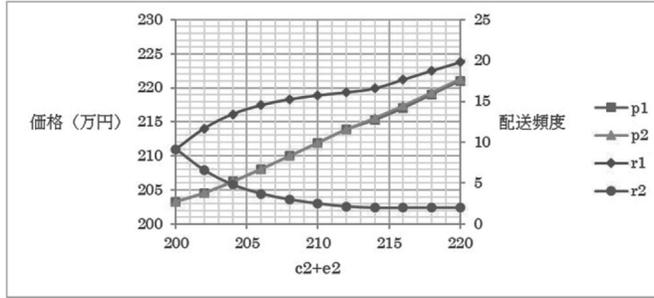


図4.7：配送頻度と価格

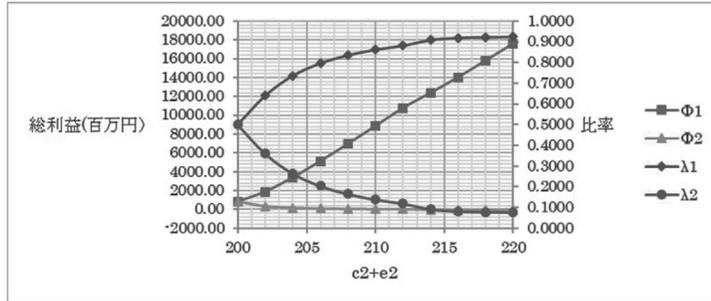


図4.8：サプライヤーの受注量の比率と総利益

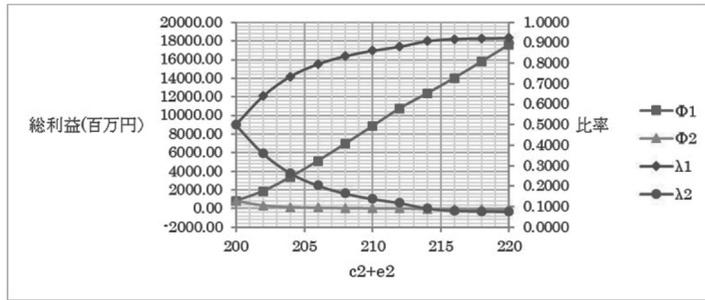


図4.9：一回の配送量

4.2.1節と似た結果が得られたが $r_1^*$ ,  $\lambda_1^*$ は曲線状に変化している。また、 $c_2 + e_2$ が200から増加したときは、 $r_1^*$ ,  $\lambda_1^*$ は急激に伸びているものの、徐々にその伸び方は緩やかになっている。

#### 4.3.2 固定コストが変化した場合

$D = 100000, h = 30, l = 7.5, u = 10, a = 201, b = 220, c_1 + e_1 = c_2 + e_2 = 200$ とする。 $C_1 + E_1 = 9000$ と固定し、 $C_2 + E_2$ を9000から14000まで500ずつ増やして実験を行った。図4.10-4.12では実験結果をグラフにまとめている。

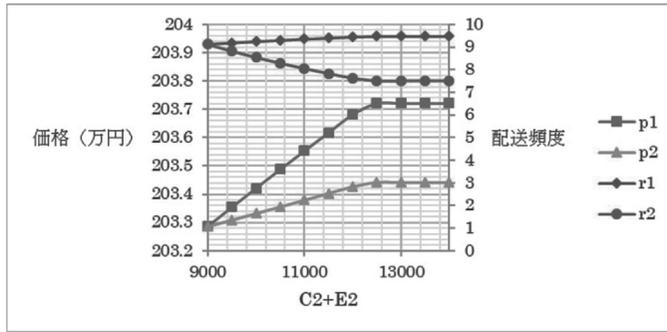


図4.10：配送頻度と価格

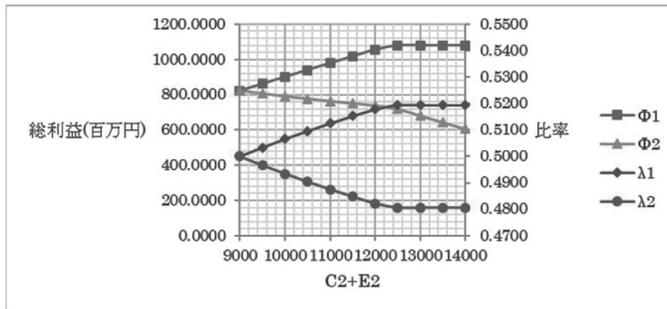


図4.11：サプライヤーの受注量の比率と総利益

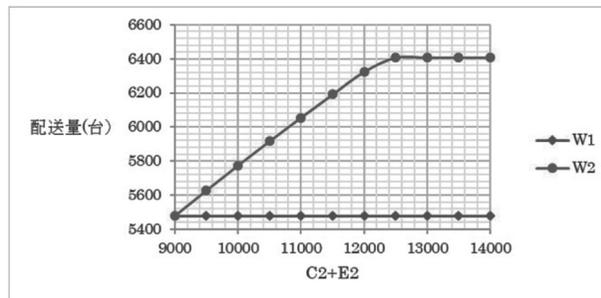


図4.12：一回の配送量

$C_2 + E_2$  が12500以上になると、 $r_2^*$  は下限に達する。 $C_2 + E_2$  の増加に伴い、各変数が上限・下限値に達するまでは、 $r_1^*$  は緩やかに大きくなり、 $r_2^*$  は小さくなる。 $p_1^*, p_2^*$  はともに上昇しているが、 $p_1^* > p_2^*$  となっている。また、 $\lambda_1^*, \Phi_1$  が増加する一方で、 $\lambda_2^*, \Phi_2$  は減少していく。 $C_2 + E_2$  が増加しても、 $W_1$  は常に同じ値であるが、 $W_2$  は増え続け、 $C_2 + E_2 \geq 12500$  のときは一定の値をとる。

#### 4.4 考察

実験全体を通して、サプライヤーの価格には大きな差はみられなかった。このとき、各サプライヤーのシェアは各々の配送頻度から大きく影響を受けることとなる。マニファクチャラーの目的関数  $\sum_{i=1}^n \left( p_i \lambda_i + \frac{h \lambda_i^2}{2r_i} \right) D$  は、配送頻度が大きくなればなるほど小さくなる。したがって、配送頻度が多いサプライヤーほど、大きなシェアを得られると考えられる。

サプライヤー間で単位コストが異なるケースについて考えると、各変数がそれぞれの上限・下限値に達していない状況下では、両サプライヤー間の価格に差はみられなかった。サプライヤー2の単位コストの増加に伴い、サプライヤー1、2とも価格が増加していることから、価格は二つのサプライヤーのうち、より大きい単位コストに依存して決まることがわかる。ただし単位コストが増加するサプライヤーに関しては、価格の増加量より単位コストの増加量のほうが大きくなっているため、総利益は下落していく。サプライヤー間で価格の差がないので、マニファクチャラーから各サプライヤーに対する発注の比率は、配送頻度の比率と同値になるため、サプライヤー間の競合は配送頻度をめぐるものとなる。単位コストが大きいほど、配送頻度を増やすごとに負担がかかるため、単位コストが小さいサプライヤー1ほど  $r_1^*$  が増え、その結果、 $\lambda_1^*$  も大きくなる。一回の配送量は一定でかつサプライヤー間の相違はなかった。

次に、サプライヤー2の固定コストが増加するケースについて考えると、どのサプライヤーの変数も上限・下限値に達しないときは、サプライヤー1の配送頻度は上昇し、サプライヤー2の配送頻度は下降するが、変化量はサプライヤー2のほうが大きい。通常は、固定コストは単位コストよりも大きい。配送頻度を1単位増やすことで、固定コストの分だけ総利益が減るため、サプライヤー2は  $r_2^*$  を減らす必要があると考えられる。価格は二つのサプライヤーとともに高く設定しているが、サプライヤー1のほうがより高く設定している。サプライヤー2は自身のコストが高くなるため、 $p_2^*$  も高く設定し、配送頻度を下げる。前述の通り、配送頻度が多くなれば、マニファクチャラーからの受注量も増えるので、サプライヤー1はシェアの獲得において有利な立場になるため、サプライヤー2よりも価格を多少は高く設定できる余裕があると考えられる。またサプライヤー1の一回の配送量が一定であることから、サプライヤー1のシェアの変化の割合は、 $r_1^*$  の変化の割合と等しくなる。

### 5. まとめと今後の課題

本論文では、サプライチェーンにおいて生じる競合状態を一般化ナッシュ均衡問題に定式化し、さらにそれを準変分不等式問題に再定式化した。また、再定式化した準変分不等式の解の存在性を証明した。さらに準変分不等式問題のKKT条件から導かれるメリット関数を用いて、数値実験を行った。数値実験では、各パラメータが変化したときに物流量や製品の価格がどのように変化するかについて考察を行った。

本論文では均衡解の唯一性については議論されていない。どのような状況において均衡解が唯一となるかの分析は今後の課題である。

## 参 考 文 献

- J. Ang, M. Fukushima, F. Meng, T. Noda, and J. Sun, Establishing Nash equilibrium of the manufacturer-supplier game in supply chain management, *Journal of Global Optimization*, 56 (2012), 1297-1312.
- V. DeMiguel and H. Xu, A stochastic Multiple-Leader Stackelberg Model: Analysis, Computation, and Application, *Operations Research*, 57 (2009), 1220-1235.
- J. Dong, D. Zhang and A. Nagurney, A supply chain network equilibrium model with random demands, *European Journal of Operational Research*, 156 (2004), 194-212.
- A. Dreves, F. Facchinei, C. Kanzow, and S. Sagratella, On the solution of the KKT conditions of generalized Nash equilibrium problems, *SIAM Journal on Optimization*, 21 (2011), 1082-1108.
- A.Y. Ha, L. Li, and S.-M. Ng, Price and Delivery Logistics Competition in a Supply Chain, *Management Science*, 49 (2003), 1139-1153.
- A. Nagurney, J. Dong and D. Zhang, A supply chain network equilibrium model, *Transportation Research Part E*, 38 (2002), 281-303.
- F. Facchinei, C. Kanzow, and S. Sagratella, Solving quasi-variational inequalities via their KKT conditions, *Mathematical Program*, 144 (2014), 369-412.
- F. Facchinei and J.-S. Pang, *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Springer, New York, 2003.
- M. Fu and M. Fukushima, Multi-leader-follower games: models, methods and applications, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 58 (2015), 1-23.
- D. Li and A. Nagurney, A general multitiered supply chain network model of quality competition with suppliers, *International Journal of Production Economics*, 170 (2015), 336-356.
- J.-S. Pang, M. Fukushima, Quasi-variational inequalities, generalized Nash equilibria, and multi-leader-follower games, *Computational Management Science*, 2 (2005), 21-56.
- 経済産業省大臣官房調査統計グループ, 平成24年 工業統計表 企業統計編, 一般財団法人経済産業調査会, (2015).
- 平野達也 成島康史, サプライチェーンネットワークにおけるロバストな均衡モデルについて, 京都大学数理解析研究所 講究録2027, 109-124, 2017.
- 福島雅夫, 非線形最適化の基礎, 朝倉書店 (2001).

[なるしま やすし 横浜国立大学大学院国際社会科学研究院准教授]

[ひらの たつや 富士通エフ・アイ・ピー株式会社]

[2017年10月6日受理]