論　説

単純エージェンシー問題における公的情報の価値*

安　部　浩　次

1．イントロダクション

プリンシパルがエージェントに業務を依頼する標準的なプリンシパル・エージェントモデルにおいては，特定の情報構造が固定されたもとでプリンシパルは契約を提示する．このことは，仮に契約提示時点で環境に様々な状態があり，その状態に業務遂行の容易さといったものが依存していたとしても，その特定の状態が起こった時点をスタート時点としてプリンシパルとエージェントの契約問題を分析していることに他ならない．しかしながら，もしも情報構造が内生的に定まる状況であったとしたら，その情報構造に至るプロセスの分析が必要になる．例えば，Kwon, Newman and Suh（2001）やKwon（2005）が保守的な会計システムが定める情報構造がモラルハザード問題を緩和する可能性について研究しているように，会計システムを通じた情報伝達が情報構造を定める場合はそのような1つの例であると考えられるだろう．本稿は，状態についての公的シグナルを受け取った後でプリンシパルが契約を提示するプロセスを明示的にモデル化することで，プリンシパルにとっての公的シグナルの情報価値を研究する．

本稿は，公的シグナルの情報価値を，状態と公的シグナルの間の条件付き確率体系（情報システム）に着目することで研究する．具体的な問いは，異なる情報システムがあったときに，そのどちらが情報価値を持つかというものである．情報価値は，プリンシパルのインセンティブ設計の観点から，どちらの情報システムが効率的に（つまり，より安い費用で）インセンティブ問題を解くかということで測られる．

本稿の主定理は，単純エージェンシー問題において情報システム間の優劣を判断するための情報価値基準をシステムを規定する確率パラメーターに関する不等式条件として導出する．「良い」状態では状態が良いことをよく伝え，「悪い」状態では状態が悪いことをよく伝えるような情報システムが１個人意思決定問題の観点から望ましいというブラックウェルの定理と比べるとその違いがはっきりするように，本稿の不等式条件が示す内容は，「良い」状態では状態が良いことをよく伝え，「悪い」状態では状態が悪いことを曖昧に伝えるような情報システムがインセンティブ設計の観点から望ましいということである．この情報価値基準はKwon（2005）が会計システムの保守主義比較を定義するために用いたものと完全に一致する．この意味で本稿の主定理は，Kwon（2005）が定義した情報比較基準の契約理論的基礎付けを与えている．

*　本研究はJSPS科研費24730166の助成を受けたものです。

これまで，プリンシパル・エージェントモデルにおける情報価値研究の多くは，エージェントの行動と結果の間の尤度体系に注目してきた．例えば先駆的な研究であるHolmström（1979）では，追加的な業績指標を用いることがモラルハザード問題を緩和するかどうかを追加指標を含む尤度体系と含まない尤度体系を比較することで分析している．また，より一般的な尤度体系の比較をしている研究としてGjesdal（1982），Grossman and Hart（1983），Kim（1995），Jewitt（1997，2007），Robbins and Sarath（1998），Demougin and Fluet（2001），Hermalin and Katz（2001），Fagart and Sinclair-Desgagné（2007）などがある．本稿のモデルは公的シグナルの情報価値を情報システムに着目することで研究する．しかしながら同時にその副産物として，エージェントの行動と結果の間の尤度体系の情報価値基準も導出する．実際，本稿は，Kim（1995）が一階条件アプローチを適用できるエージェンシー問題で導出した情報価値基準と同じものを単純エージェンシー問題において導出する[1]

２．単純エージェンシー問題

この節では本稿で扱う単純エージェンシー問題を定義する．あるプロジェクトの実行を一人のプリンシパルが一人のエージェントに依頼する状況を想定する．プロジェクトの成否は，プロジェクトが実行される環境（状態パラメーター）とエージェントがプロジェクトに投入する努力水準とに依存して，確率的に決まる．プロジェクトの結果xは集合$\{S, F\}$のいずれかの要素をとる．ここで, シンボルSはプロジェクトの成功を, シンボルFは失敗を表す．同様に, エージェントの努力水準も状態パラメーターも２つの値のいずれかをとる．エージェントが投入しうる努力水準eは高い努力水準e_hか低い努力水準e_lのいずれかである．状態パラメーターθはG，Bのいずれかをとる．状態パラメーターが$\theta(\in\{G, B\})$のときに，エージェントが努力水準$e_j(j\in\{h, l\})$を投入したときの結果$x(\in\{S, F\})$の尤度を$\lambda^{\theta}_{x|j}$とすると，尤度体系は次の２つの行確率行列で表される．

$$\lambda^G := \begin{pmatrix} \lambda^G_{S|h} & \lambda^G_{F|h} \\ \lambda^G_{S|l} & \lambda^G_{F|l} \end{pmatrix} \text{ および } \lambda^B := \begin{pmatrix} \lambda^B_{S|h} & \lambda^B_{F|h} \\ \lambda^B_{S|l} & \lambda^B_{F|l} \end{pmatrix}.$$

以下では，どのような状態であっても，努力水準e_hは努力水準e_lよりも高いプロジェクト成功確率を誘導することを仮定する．このことから本稿が許容する尤度体系は次の集合の要素として記述されなければならない．

$$\Lambda := \{(\lambda^G, \lambda^B) \in M_2 \times M_2 \mid \lambda^{\theta}_{S|h} > \lambda^{\theta}_{S|l} \text{ for } \theta = G, B\},$$

ここで，M_2は２行２列の行確率行列全体からなる集合である．

エージェントの効用は所得wと投入する努力水準eの上に定義される．ここでは効用関数は次のような加法分離型であると仮定する．

---

[1] ただし，この副産物に関して言えば，例えばGrossman and Hart（1983, p.37）やLarmande（2013, Prop.1）で論じられているように，とくに新しいものではない．

$$U(w,\ e)=u(w)-\mathbf{1}_{\{e=e_h\}}(e)\cdot c,$$

ここで，$u'>0$, $u''<0$, $c>0$を仮定する．また，$\mathbf{1}$は指示関数である．

プリンシパルとエージェントは共に状態パラメーターを観察することができない．代わりに，彼らは状態パラメーター上の事前確率分布を共通信念として保有している．具体的に，彼らは状態パラメーターを確率$p\in(0,\ 1)$で$\theta=G$が起こる確率変数として見ているとする．

状態パラメーターの実現を観察することはないが，彼らは状態に関する公的シグナルσを観察する．シグナルは条件付き確率体系ηに従って$\{g,\ b\}$のいずれかの値をとる．この確率体系ηを情報システムと呼ぶ．具体的に，状態パラメーターが$\theta(\in\{G,\ B\})$であったときにシグナル$\sigma(\in\{g,\ b\})$が観察される確率をη_σ^θとすると，情報システムは次の行確率行列で表される．

$$\eta:=\begin{pmatrix}\eta_g^G & \eta_b^G\\ \eta_g^B & \eta_b^B\end{pmatrix}.$$

ここで，シグナルgはシグナルbに比べて相対的に状態Gについての情報を持っていると仮定する．すなわち，シグナルgに条件付けて更新された状態Gの信念はシグナルbに条件付けて更新されたものより（弱い意味も含めて）高い[2]．このことから本稿が許容する情報システムは次の集合の要素として記述されなければならない[3]．

$$I:=\left\{\eta\in M_2\mid \eta_g^G\geq\eta_g^B\right\}.$$

以上の準備のもと，単純エージェンシー問題を次のように定義する．

定義１．組$(u,\ c,\ U_0,\ p,\ \lambda,\ \eta)\in\mathcal{U}\times\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}\times(0,\ 1)\times\Lambda\times I$を単純エージェンシー問題と呼ぶ．ここで，$\mathcal{U}$は増加かつ凹関数全体からなる所得に関する効用関数の集合である．また，U_0は留保効用である．組$\mathcal{E}=(u,\ c,\ U_0)$を基本環境と呼ぶ．

３．公的シグナルと最適インセンティブスキーム

プリンシパルは公的シグナルに依存したインセンティブスキームを設計することでどのシグナルを受け取ったとしてもエージェントに高い努力水準でプロジェクトを実行してもらうことに興味があるとする．プリンシパルの目的は，その際に生じる費用を最小にすることである．この節ではプリンシパルの直面するこの問題を定式化する．

以下では，シンボルμ_θ^σを，シグナルσに条件付けた，状態θに対するベイズ更新信念の意味で使う．つまり，

[2] つまり，Milgrom（1981）の意味で，シグナルgはシグナルbに比べて状態GについてのGood Newsである．

[3] Milgrom（1981）が示したように，シグナルgはシグナルbに比べて状態GについてのGood Newsであることの２項環境における必要十分条件は単調尤度比条件$\eta_g^G\eta_b^B\geq\eta_g^B\eta_b^G$が成り立つことである．ここで，単調尤度比条件は単純に$\eta_g^G\geq\eta_g^B$となる．

$$(\mu_G^\sigma,\ \mu_B^\sigma) := \left(\frac{p\eta_\sigma^G}{p\eta_\sigma^G+(1-p)\eta_\sigma^B},\ \frac{(1-p)\eta_\sigma^B}{p\eta_\sigma^G+(1-p)\eta_\sigma^B}\right)$$

である．また，シンボル$\nu_{x|j}^\sigma$をシグナルσが観察されたときに，エージェントの努力水準e_jに条件付けた，結果xに対するベイズ更新信念の意味で使う．つまり，

$$\nu_{x|j}^\sigma := \mu_G^\sigma \lambda_{x|j}^G + \mu_B^\sigma \lambda_{x|j}^B$$

である．

注意1．本稿で許容するどのような尤度体系$\lambda \in \Lambda$，そしてどのような情報システム$\eta \in I$に対しても

$$\mu_G^g \geq p \geq \mu_G^b$$

および

$$\frac{\nu_{S|h}^\sigma}{\nu_{S|l}^\sigma} > 1 > \frac{\nu_{F|h}^\sigma}{\nu_{F|l}^\sigma}$$

が成り立つ．ここで前者はシグナルのGood News/Bad News条件であり，後者は更新信念比の単調性条件である．

問題を簡潔に記述するために次の記号を用意する．

$$\nu_j^\sigma := (\nu_{S|j}^\sigma,\ \nu_{F|j}^\sigma),$$

$$w^\sigma := (w_S^\sigma,\ w_F^\sigma),$$

$$\upsilon^\sigma := (u(w_S^\sigma),\ u(w_F^\sigma)).$$

このとき，公的シグナル$\sigma(\in\{g,\ b\})$を観察したときのプリンシパルの目的は，エージェントに努力水準e_hをとりプロジェクトを遂行してもらうようインセンティブを与えつつ，そのようなインセンティブスキームにかかる費用を最小化することである．つまり，プリンシパルが直面する費用最小化問題は次のとおりである．

$$\min_{w^\sigma} \nu_h^\sigma \cdot w^\sigma \quad \text{subject to}$$

$$\nu_h^\sigma \cdot \upsilon^\sigma - c \geq \nu_l^\sigma \cdot \upsilon^\sigma \tag{IC}$$

$$\nu_h^\sigma \cdot \upsilon^\sigma - c \geq U_0 \tag{IR}$$

ここで，制約（IC）は誘因両立性制約，そして制約（IR）は個人合理性制約（参加制約）である．この費用最小化問題の解は次の最適インセンティブスキームにより与えられる．

補題1．どのような単純エージェンシー問題$(u,\ c,\ U_0,\ p,\ \lambda,\ \eta) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R} \times (0,\ 1) \times \Lambda \times I$

に対しても，公的シグナル$\sigma(\in\{g, b\})$を観察したときのプリンシパルの最適インセンティブスキームは

$$w_S^\sigma = u^{-1}\left(U_0+c+\left\{\frac{\nu_{F|h}^\sigma}{\nu_{S|h}^\sigma-\nu_{S|l}^\sigma}\right\}c\right),$$
$$w_F^\sigma = u^{-1}\left(U_0+c-\left\{\frac{\nu_{S|h}^\sigma}{\nu_{S|h}^\sigma-\nu_{S|l}^\sigma}\right\}c\right).$$

で与えられる．

証明. 公的シグナルを所与とすれば，プリンシパルの直面する問題は契約理論における標準的なインセンティブ設計の費用最小化問題と同じであることから結果は直ちに従う．例えば，Laffont and Martimort（2002）のProposition 4.4を参照せよ．　□

4．更新信念体系の比較と状態パラメーター上の順序

公的シグナルにより更新される信念体系$\nu^\sigma=(\nu_h^\sigma, \nu_l^\sigma)$は情報構造$(p, \lambda, \eta)$に依存して決まることに注意しよう．同時に，この更新信念体系は基本環境$\mathcal{E}=(u, c, U_0)$には依存しないことに注意しよう．これらのことは，公的シグナルσを所与とすれば，最適インセンティブスキームが基本環境と更新信念体系の組$(\mathcal{E}, \nu^\sigma)$にのみ依存することを含意する．そこで，公的シグナルσに対する最適インセンティブスキームを$w^\sigma(\mathcal{E}, \nu^\sigma)=(w_S^\sigma(\mathcal{E}, \nu^\sigma), w_F^\sigma(\mathcal{E}, \nu^\sigma))$と書く．そして，公的シグナル$\sigma$を観察したときにエージェントに努力水準$e_h$をとりプロジェクトを遂行してもらうための，この最適インセンティブスキームにより達成される最小期待費用を$\mathcal{C}(\mathcal{E}, \nu^\sigma):=\nu_h^\sigma\cdot w^\sigma(\mathcal{E}, \nu^\sigma)$と書く．このとき次の補題を得る．

補題2． ある情報構造と公的シグナルσにより誘導された2つの更新信念体系ν^σおよび$\hat{\nu}^\sigma$を考えよ．このとき，全ての基本環境$\mathcal{E}$に対して$\mathcal{C}(\mathcal{E}, \nu^\sigma)\leq\mathcal{C}(\mathcal{E}, \hat{\nu}^\sigma)$が成立することの必要十分条件は

$$\frac{\nu_{F|h}^\sigma}{\nu_{F|l}^\sigma}\leq\frac{\hat{\nu}_{F|h}^\sigma}{\hat{\nu}_{F|l}^\sigma} \text{ および } \frac{\hat{\nu}_{S|h}^\sigma}{\hat{\nu}_{S|l}^\sigma}\leq\frac{\nu_{S|h}^\sigma}{\nu_{S|l}^\sigma}$$

が成立することである．

証明. 任意に$(c, U_0)\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}$を固定せよ．確率変数$Z(\nu^\sigma)$を次のように定義せよ．

$$Z(\nu^\sigma)=\begin{cases}\dfrac{\nu_{F|h}^\sigma}{\nu_{S|h}^\sigma-\nu_{S|l}^\sigma} & \text{with probability } \nu_{S|h}^\sigma,\\ -\dfrac{\nu_{S|h}^\sigma}{\nu_{S|h}^\sigma-\nu_{S|l}^\sigma} & \text{with probability } \nu_{F|h}^\sigma.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\nu_{F|l}^\sigma/\nu_{F|h}^\sigma-1} & \text{with probability } \nu_{S|h}^\sigma,\\ -\dfrac{1}{1-\nu_{S|l}^\sigma/\nu_{S|h}^\sigma} & \text{with probability } \nu_{F|h}^\sigma.\end{cases}$$

ならばこのとき，任意のν^σに対して

$$\mathbb{E}[Z(\nu^\sigma)]=0 \text{ および } \mathcal{C}((u,\ c,\ U_0),\ \nu^\sigma)=\mathbb{E}[u^{-1}(U_0+c+Z(\nu^\sigma)c)]$$

が成り立つ．ここで，$u\in\mathcal{U}$は増加かつ凹関数であるので，その逆関数u^{-1}は増加かつ凸関数であることに注意しよう．このことの含意として次が得られる．任意の基本環境$(u,\ c,\ U_0)\in\{(u,\ c,\ U_0)\}_{u\in\mathcal{U}}$に対して

$$\mathcal{C}((u,\ c,\ U_0),\ \nu^\sigma)\leq\mathcal{C}((u,\ c,\ U_0),\ \hat{\nu}^\sigma)$$

が成立することの必要十分条件は確率変数$Z(\nu^\sigma)$が$Z(\hat{\nu}^\sigma)$を第2次確率支配することである．さらに，先に述べたことから2つの確率変数$Z(\nu^\sigma)$と$Z(\hat{\nu}^\sigma)$の平均は共に0であるので，確率変数$Z(\nu^\sigma)$が$Z(\hat{\nu}^\sigma)$を第2次確率支配することの必要十分条件は確率変数$Z(\hat{\nu}^\sigma)$が$Z(\nu^\sigma)$の平均保存拡散であることである．そして，このことの必要十分条件はある2行2列行確率行列Pが存在して，次の2条件

$$\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\nu^\sigma_{F|l}/\nu^\sigma_{F|h}-1}\\-\dfrac{1}{1-\nu^\sigma_{S|l}/\nu^\sigma_{S|h}}\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\hat{\nu}^\sigma_{F|l}/\hat{\nu}^\sigma_{F|h}-1}\\-\dfrac{1}{1-\hat{\nu}^\sigma_{S|l}/\hat{\nu}^\sigma_{S|h}}\end{pmatrix} \qquad \text{（結果の縮小性）}$$

$$\left(\hat{\nu}^\sigma_{S|h},\ \hat{\nu}^\sigma_{F|h}\right)=\left(\nu^\sigma_{S|h},\ \nu^\sigma_{F|h}\right)P \qquad \text{（事前分布の準歪曲）}$$

を満たすことである[4]．ところが，確率変数$Z(\nu^\sigma)$と$Z(\hat{\nu}^\sigma)$が同じ平均を持つことがわかっているので，付録で示されるように本稿のような2項環境においては事前分布の準歪曲は結果の縮小性より自然に導かれることがわかる．そこで結果の縮小性のみに着目すればよいが，結果の縮小性の必要十分条件が

$$\frac{\nu^\sigma_{F|h}}{\nu^\sigma_{F|l}}\leq\frac{\hat{\nu}^\sigma_{F|h}}{\hat{\nu}^\sigma_{F|l}}<1<\frac{\hat{\nu}^\sigma_{S|h}}{\hat{\nu}^\sigma_{S|l}}\leq\frac{\nu^\sigma_{S|h}}{\nu^\sigma_{S|l}}$$

であることを確認することは容易い．このことは最初に任意に固定した$(c,\ U_0)$に対して成り立つのだから，証明は完結する．　□

　補題の含意から状態パラメーター上に自然な順序を定義することができる．尤度体系の集合Λ_1を次のように定義する．

$$\lambda\in\Lambda_1 \text{ if and only if } \frac{\lambda^G_{F|h}}{\lambda^G_{F|l}}\leq\frac{\lambda^B_{F|h}}{\lambda^B_{F|l}}<1<\frac{\lambda^B_{S|h}}{\lambda^B_{S|l}}\leq\frac{\lambda^G_{S|h}}{\lambda^G_{S|l}}.$$

ならば，Λ_1はΛの真部分集合である．さらに，先に示した補題より直ちに次のことがわかる．

[4] 平均保存拡散に関してはRothschild and Stiglitz（1970）を参照せよ．

系１．プリンシパルとエージェントが状態パラメーターθを直接観察したときに，エージェントに努力水準e_hをとりプロジェクトを遂行してもらうための最適インセンティブスキームにより達成される最小期待費用を$C(\mathcal{E}, \lambda^\theta)$と書こう．このとき，全ての基本環境$\mathcal{E}$と全ての尤度体系$\lambda \in \Lambda_1$に対して$C(\mathcal{E}, \lambda^G) \leq C(\mathcal{E}, \lambda^B)$が成立する．

注意２．系１より，プリンシパルの費用最小化の観点から曖昧なく状態Gは状態Bよりも良い状態であると主張できる．

注意３．系１をエージェントの行動と結果の間の尤度体系の情報価値比較の観点から見る．これは尤度λ^Gが尤度λ^Bよりも優れているための必要十分条件を述べていることに他ならない．そして，この必要十分条件は尤度比の平均保存拡散条件として記述されていることに注意しよう．この条件は，１階条件アプローチが適用できるエージェンシー問題においてKim（1995）が導出した情報価値基準に他ならない[5]．

５．情報システムの比較

事前確率pと尤度体系λのもとで，情報システムηにより誘導される信念体系を$\nu(\eta \mid p, \lambda)$と書こう．そして，基本環境$\mathcal{E}$と情報構造$(p, \lambda, \eta) \in (0, 1) \times \Lambda_1 \times I$のもとで，公的シグナル$\sigma$を観察したときに，エージェントに努力水準$e_h$をとりプロジェクトを遂行してもらうための最適インセンティブスキームにより達成される最小期待費用を$C(\mathcal{E}, \nu^\sigma(\eta \mid p, \lambda))$と書こう．本稿の主定理は次で与えられる．

定理１．２つの情報システム$\eta, \hat{\eta} \in I$を考えよ．このとき，全ての基本環境$\mathcal{E}$，全てのペア$(p, \lambda) \in (0, 1) \times \Lambda_1$そして全ての公的シグナル$\sigma = g, b$に対して$C(\mathcal{E}, \nu^\sigma(\eta \mid p, \lambda)) \leq C(\mathcal{E}, \nu^\sigma(\hat{\eta} \mid p, \lambda))$が成り立つための必要十分条件は

$$\frac{\hat{\eta}_b^G}{\hat{\eta}_b^B} \leq \frac{\eta_b^G}{\eta_b^B} \text{ および } \frac{\hat{\eta}_g^G}{\hat{\eta}_g^B} \leq \frac{\eta_g^G}{\eta_g^B}$$

が成立することである．特に，(i)全ての基本環境$\mathcal{E}$，そして全てのペア$(p, \lambda) \in (0, 1) \times \Lambda_1$に対して$C(\mathcal{E}, \nu^g(\eta \mid p, \lambda)) \leq C(\mathcal{E}, \nu^g(\hat{\eta} \mid p, \lambda))$が成り立つための必要十分条件が後者の不等号であり，(ii)全ての基本環境$\mathcal{E}$，そして全てのペア$(p, \lambda) \in (0, 1) \times \Lambda_1$に対して$C(\mathcal{E}, \nu^b(\eta \mid p, \lambda)) \leq C(\mathcal{E}, \nu^b(\hat{\eta} \mid p, \lambda))$が成り立つための必要十分条件が前者の不等号である．

証明．補題より，全ての基本環境$\mathcal{E}$に対して$C(\mathcal{E}, \nu^g(\eta \mid p, \lambda)) \leq C(\mathcal{E}, \nu^g(\hat{\eta} \mid p, \lambda))$が成り立つための必要十分条件は

$$\frac{\nu^g_{F|h}(\eta \mid p, \lambda)}{\nu^g_{F|l}(\eta \mid p, \lambda)} \underset{(1)}{\leq} \frac{\nu^g_{F|h}(\hat{\eta} \mid p, \lambda)}{\nu^g_{F|l}(\hat{\eta} \mid p, \lambda)} < 1 < \frac{\nu^g_{S|h}(\hat{\eta} \mid p, \lambda)}{\nu^g_{S|l}(\hat{\eta} \mid p, \lambda)} \underset{(2)}{\leq} \frac{\nu^g_{S|h}(\eta \mid p, \lambda)}{\nu^g_{S|l}(\eta \mid p, \lambda)}$$

が成り立つことである．不等式（1）は書き直すと

5　１階条件アプローチが適用できるエージェンシー問題において，Kim（1995）は尤度比の平均保存拡散条件が本稿で述べている意味でのモラルハザード問題緩和の十分条件であることを示した．そして，同じ環境で，この条件がモラルハザード問題緩和の必要条件でもあることがJewitt（1997）により示された．

$$\gamma\frac{\lambda^G_{F|h}}{\lambda^G_{F|l}}+(1-\gamma)\frac{\lambda^B_{F|h}}{\lambda^B_{F|l}}\leq\hat{\gamma}\frac{\lambda^G_{F|h}}{\lambda^G_{F|l}}+(1-\hat{\gamma})\frac{\lambda^B_{F|h}}{\lambda^B_{F|l}}$$

となる．ここで，

$$\gamma=\frac{p\eta^G_g\lambda^G_{F|l}}{p\eta^G_g\lambda^G_{F|l}+(1-p)\eta^B_g\lambda^B_{F|l}},$$

$$\hat{\gamma}=\frac{p\hat{\eta}^G_g\lambda^G_{F|l}}{p\hat{\eta}^G_g\lambda^G_{F|l}+(1-p)\hat{\eta}^B_g\lambda^B_{F|l}},$$

である．そして，$\lambda\in\Lambda_1$であるという事実より，不等式（1）は$\gamma\geq\hat{\gamma}$と同値であり，そしてこのことは代わって

$$\frac{\hat{\eta}^G_g}{\hat{\eta}^B_g}\leq\frac{\eta^G_g}{\eta^B_g}\tag{3}$$

と同値であることを確認することは容易である．

不等式（2）は書き直すと

$$\gamma\frac{\lambda^G_{S|h}}{\lambda^G_{S|l}}+(1-\gamma)\frac{\lambda^B_{S|h}}{\lambda^B_{S|l}}\leq\hat{\gamma}\frac{\lambda^G_{S|h}}{\lambda^G_{S|l}}+(1-\hat{\gamma})\frac{\lambda^B_{S|h}}{\lambda^B_{S|l}}$$

となる．そして，不等式（2）もまた不等式（3）と同値であることを確認することは容易い．

ここまでの証明は特定のペア$(p,\lambda)\in(0,1)\times\Lambda_1$に依存しないことに注意すると次の事実を得る．全ての基本環境$\mathcal{E}$，全てのペア$(p,\lambda)\in(0,1)\times\Lambda_1$に対して$\mathcal{C}(\mathcal{E},\nu^g(\eta\mid p,\lambda))\leq\mathcal{C}(\mathcal{E},\nu^g(\hat{\eta}\mid p,\lambda))$が成立することの必要十分条件は不等式（3）が成り立つことである．

同様にして，全てのペア$(p,\lambda)\in(0,1)\times\Lambda_1$に対して$\mathcal{C}(\mathcal{E},\nu^b(\eta\mid p,\lambda))\leq\mathcal{C}(\mathcal{E},\nu^b(\hat{\eta}\mid p,\lambda))$が成立することの必要十分条件は命題の残りの不等式が成り立つことであることを示すことができる．　□

定理の不等式条件は情報システムの集合に半順序を定める．具体的にこの半順序のもとでは，情報システムηは情報システム$\hat{\eta}$と比べて，良い状態の時には状態が良いことをよく伝え，悪い状態のときには状態が悪いことを曖昧に伝える．このことはインセンティブ設計のしやすさの観点から極めて直感的であろう．次の系により，この半順序のもとでは，完全なノイズにすぎない無情報システムよりも優れている情報システムは存在しないことがわかる．

系２． ２つの情報システム$\eta,\hat{\eta}\in I$を考えよ．ただし，$\hat{\eta}^G_g=\hat{\eta}^B_b=1/2$とせよ．このとき，全ての基本環境$\mathcal{E}$，全てのペア$(p,\lambda)\in(0,1)\times\Lambda_1$に対して$\mathcal{C}(\mathcal{E},\nu^g(\eta\mid p,\lambda))\leq\mathcal{C}(\mathcal{E},\nu^g(\hat{\eta}\mid p,\lambda))$が成り立つことと，全ての基本環境$\mathcal{E}$，全てのペア$(p,\lambda)\in(0,1)\times\Lambda_1$に対して$\mathcal{C}(\mathcal{E},\nu^b(\eta\mid p,\lambda))\geq\mathcal{C}(\mathcal{E},\nu^b(\hat{\eta}\mid p,\lambda))$が成り立つことは同値である．

証明． 定理より，全ての基本環境$\mathcal{E}$，全てのペア$(p,\lambda)\in(0,1)\times\Lambda_1$に対して$\mathcal{C}(\mathcal{E},\nu^g(\eta\mid p,\lambda))$

$\leq \mathcal{C}(\mathcal{E}, \nu^g(\hat{\eta} \mid p, \lambda))$が成り立つことの必要十分条件は

$$\frac{\hat{\eta}_g^G}{\hat{\eta}_g^B} \leq \frac{\eta_g^G}{\eta_g^B}$$

である．この不等式は，仮定より左辺が1であることを利用すると，$\eta_g^B \leq \eta_g^G$と書き直すことができる．同様に，全ての基本環境$\mathcal{E}$，全てのペア$(p, \lambda) \in (0, 1) \times \Lambda_1$に対して$\mathcal{C}(\mathcal{E}, \nu^b(\eta \mid p, \lambda)) \geq \mathcal{C}(\mathcal{E}, \nu^b(\hat{\eta} \mid p, \lambda))$が成り立つことの必要十分条件は

$$\frac{\hat{\eta}_b^G}{\hat{\eta}_b^B} \leq \frac{\eta_b^G}{\eta_b^B}$$

である．この不等式は，仮定より左辺が1であることを利用すると，$\eta_b^B \leq \eta_b^G$と書き直すことができる．つまり，$1-\eta_g^B \leq 1-\eta_g^G$であるので$\eta_g^G \leq \eta_g^B$である．　□

6．ブラックウェル情報価値との関係

この節では，主定理の情報順序と名高いブラックウェル順序を比較する[6]．

定義2． 2つの情報システムη, $\hat{\eta} \in I$を考えよ．情報システムηが情報システム$\hat{\eta}$よりブラックウェルの意味で情報価値があるとは後者が前者の準歪曲であることである．つまり，$\eta Q = \hat{\eta}$を満たす2行2列行確率行列Qが存在することである．

補題3． 2つの情報システムη, $\hat{\eta} \in I$を考えよ．情報システムηが情報システム$\hat{\eta}$よりブラックウェルの意味で情報価値があるための必要十分条件は

$$\frac{\eta_b^G}{\eta_b^B} \leq \frac{\hat{\eta}_b^G}{\hat{\eta}_b^B} \quad \text{および} \quad \frac{\hat{\eta}_g^G}{\hat{\eta}_g^B} \leq \frac{\eta_g^G}{\eta_g^B}$$

が成立することである．

証明． Marschak（1971）のSection 7.2を見よ．　□

補題3の不等式条件は情報システムの集合に半順序を定める．具体的にこの半順序のもとでは，情報システムηは情報システム$\hat{\eta}$と比べて，良い状態の時には状態が良いことをよく伝え，悪い状態のときには状態が悪いことをよく伝える．結果として，次の系が示すように，この半順序で優れた情報システムは，悪い状態のときのインセンティブ設計が難しいものとなる．

系3． 2つの情報システムη, $\hat{\eta} \in I$を考えよ．情報システムηが情報システム$\hat{\eta}$よりブラックウェルの意味で情報価値があるための必要十分条件は全ての基本環境$\mathcal{E}$，そして全てのペア$(p, \lambda) \in (0, 1) \times \Lambda_1$に対して$\mathcal{C}(\mathcal{E}, \nu^g(\eta \mid p, \lambda)) \leq \mathcal{C}(\mathcal{E}, \nu^g(\hat{\eta} \mid p, \lambda))$かつ$\mathcal{C}(\mathcal{E}, \nu^b(\eta \mid p, \lambda)) \geq \mathcal{C}(\mathcal{E}, \nu^b(\hat{\eta} \mid p, \lambda))$が成り立つことである．

---

[6] ブラックウェルの定理に関してはBlackwell and Girshick（1979）を見よ．

証明. 定理と補題3による. □

付録

補題2の証明で述べたように，本稿のような2項環境では平均保存関係にある2つの確率変数が結果の縮小性を満たせば，それらは分布の準歪曲も満たす．この付録ではこのことを確認する．そのために2つの確率変数

$$\tilde{a} = \begin{cases} a_1 & \text{with probability } \alpha, \\ a_2 & \text{with probability } 1-\alpha, \end{cases}$$

$$\tilde{b} = \begin{cases} b_1 & \text{with probability } \beta, \\ b_2 & \text{with probability } 1-\beta, \end{cases}$$

を考えよ．そして，$b_1 \neq b_2$を仮定せよ．このとき，

$$(\alpha,\ 1-\alpha)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (\beta,\ 1-\beta)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

および

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & 1-q_1 \\ q_2 & 1-q_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つとせよ．ならば

$$(\alpha,\ 1-\alpha)\begin{pmatrix} q_1 & 1-q_1 \\ q_2 & 1-q_2 \end{pmatrix} = (\beta,\ 1-\beta)$$

である．

証明. 縮小性条件より

$$q_1 = \frac{a_1 - b_2}{b_1 - b_2} \text{ および } q_2 = \frac{a_2 - b_2}{b_1 - b_2}$$

を得る．

[Case 1] $a_1 \neq a_2$：平均保存条件より

$$\alpha = \frac{\beta(b_1 - b_2) + (b_2 - a_2)}{a_1 - a_2}.$$

を得る．したがって，

$$\alpha q_1+(1-\alpha)q_2=\frac{\{\beta(b_1-b_2)+(b_2-a_2)\}(a_1-b_2)+\{(a_1-b_2)-\beta(b_1-b_2)\}(a_2-b_2)}{(a_1-a_2)(b_1-b_2)}$$
$$=\beta$$

である．

[Case 2] $a_1=a_2=a$：縮小性条件より

$$q_1=q_2=\frac{a-b_2}{b_1-b_2}.$$

を得る．これに平均保存条件 $a=\beta b_1+(1-\beta)b_2$ を代入して $q_1=\beta$ を得る．　□

参 考 文 献

Blackwell, David and Meyer A. Girshick (1979) *Theory of Games and Statistical Decisions*, Dover Edition, New York: Dover Publications. (Reprint of the 1954 John Wiley and Sons Edition).

Demougin, Dominique and Claude Fluet (2001) "Ranking of Information Systems in Agency Models: An Integral Condition," *Economic Theory*, Vol. 17, No. 2, pp. 489-496.

Fagart, Marie-Cécile, and Bernard Sinclair-Desgagné (2007) "Ranking Contingent Monitoring Systems," *Management Science*, Vol. 53, No. 9, pp. 1501-1509.

Gjesdal, Frøystein (1982) "Information and Incentives: The Agency Information Problem," *Review of Economic Studies*, Vol. 49, No. 3, pp. 373-390.

Grossman, Sanford J. and Oliver D. Hart (1983) "An Analysis of the Principal-Agent Problem," *Econometrica*, Vol. 51, No. 1, pp. 7-45.

Hermalin, Benjamin E. and Michael Katz (2001) "Corporate Diversification and Agency," in *Incentives, Organization, and Public Economics: Papers in Honour of Sir James Mirrlees*, edited by Peter Hammond and Gareth Myles, Oxford: Oxford University Press.

Holmström, Bengt (1979) "Moral Hazard and Observability," *Bell Journal of Economics*, Vol. 10, No. 1, pp. 74-91.

Jewitt, Ian (1997) "Information and Principal Agent Problems," *Department of Economics, Discussion Papers* No. 97/414, University of Bristol.

Jewitt, Ian (2007) "Information Order in Decision and Agency Problems," Unpublished manuscript, Nuffield College.

Kim, Son Ku (1995) "Efficiency of an Information System in an Agency Model," *Econometrica*, Vol. 63, No. 1, pp. 89-102.

Kwon, Young K. (2005) "Accounting Conservatism and Managerial Incentives," *Management Science*, Vol. 51, No. 11, pp. 1626-1632.

Kwon, Young K., D. Paul Newman, and Yoon S. Suh (2001) "The Demand for Accounting Conservatism for Management Control," *Review of Accounting Studies*, Vol. 6, No. 1, pp. 29-51.

Laffont, Jean-Jacques and David Martimort (2002) *The Theory of Incentives: The Principal-Agent Model*, Princeton: Princeton University Press.

Larmande, François (2013) "Limited Liability, the First-order Approach, and the Ranking of Information Systems in Agencies," *Economics Letters*, Vol. 118, No. 2, pp. 314-317.

Marschak, Jacob (1971) "Economics of Information Systems," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 67, No. 333, pp. 192-219.

Milgrom, Paul R. (1981) "Good News and Bad News: Representation Theorems and Applications," *Bell Journal of Economics*, Vol. 12, No. 2, pp. 380-391.

Robbins, Edward Henry and Bharat Sarath（1998）"Ranking Agencies under Moral Hazard," *Economic Theory*, Vol. 11, No. 1, pp. 129-155.
Rothschild, Michael and Joseph E. Stiglitz（1970）"Increasing Risk: I. A Definition," *Journal of Economic Theory*, Vol. 2, No. 3, pp. 225-243.

〔あべ　こうじ　横浜国立大学大学院国際社会科学研究院准教授〕
〔2014年１月14日受理〕