論　　説

製造販売型ビジネスゲームにおける需要分配に関する考察

田名部　元　成

1．はじめに

価格，広告，品質などの要素によって，需要が各プレイヤーに分配されるようなビジネスゲームにおいては，需要決定要因を引数とする単調関数による値を用いて，その関数値の比例分配を市場占有率(マーケットシェア)とすることが多い．商品販売価格の逆数やその２乗などで「価格力」を表現し，総需要を各プレイヤーの「価格力」に応じて按分するという方法は，その例である．このような場合，需要は全プレイヤーの意思決定に基づいて決定されるため，需要は外乱要因となる．このように需要分配の方法は，ゲームの動的挙動を決定づける構造上の重要な要素であり，この方法を変えれば別の市場特性を想定した異なるゲームに変化させることも可能となる．しかしながら，十分に利用実績のあるビジネスゲームをそのまま用いる場合とは異なり，既存にあるゲームのモデルを修正したり，あるいは新規にモデルを設計したりする場合では，需要分配をどのよう方法で行うか，またそれに必要なパラメータをどのように設定するかといった問題が生じる．また，設計した市場にマシンエージェント（以下，エージェントと呼ぶ）を混在させる場合に，その市場において望ましい動きをするエージェントをどのように設計するかという問題も生じる．

本論では，このようなビジネスゲーム設計時に生じる需要分配方式に関連する問題に焦点を当て，需要決定関数の持つべき条件や性質とその応用について述べるとともに，ゲーム設計に対する新しい方法の提案を行う．本論を通じて需要分配を考察するための共通の土台として，まず，わが国で多くの利用実績をもつベーカリーゲームとよばれる製造販売型ビジネスゲームの数理モデルを提示する．次に，需要決定関数の数理的性質について述べ，それらの性質の市場設計や戦略分析における利用例について述べる．さらに，特定の需要決定方法の下での，エージェント設計に利用可能な数学的手法について述べる．最後に市場分析とエージェント設計のための実データを用いたシミュレーション手法を提案し，その実装例を示す．

2．ベーカリーゲームの数理モデル

本論では，製造販売型ビジネスゲームの需要分配の考察の土台として，ベーカリーゲーム（白井2008）を取り上げる．ベーカリーゲームは，10名程度のプレイヤーが，パンの製造販売を行

いながら，営業利益を競うゲームである．各プレイヤーは，毎期，パンの材料調達個数，パンの製造指図数，パンの販売価格の３つの項目を意思決定する．材料納入と製品製造のリードタイムはそれぞれ１期である．各プレイヤーに対する需要（顧客数）は，各プレイヤーの決定した製品販売価格に応じて，総需要が分配される形で決定される．品切れは次期以降の需要に影響を与え，一方，売れ残りは廃棄損失となる．

ここでは，今後の数理的議論のために，ベーカリーゲームをオートマトンとして定式化する．ただし，本論の関心は需要分配にあるため，ゲーム構造の詳細を公開することによる教育利用上の影響を考慮して，品切れ損失などの要素は簡略化するか考慮しないこととする．これ以降，価格や利益など金額の取り得る値の集合をP，材料個数，製造個数，需要など個数に関する値の集合をQで表すことにする．解析的取り扱いの都合からPとQの具体的集合として実数全体の集合$\mathbb{R}$の部分集合あるいはそれ自身を仮定する．また記法として$\mathbf{1}=(1, 1, \cdots, 1)\in\mathbb{R}^n$を導入しておく．

定義１　関数$\sigma: P^n\to[0, 1]^n$が，任意の$x\in P^n$に対して$\mathbf{1}\sigma(x)^T=1$をみたすとき，σをP上のn次市場占有率関数という．

定義２　nを正の整数とする．定数$\gamma, \phi\in P$とP上のn次市場占有率関数σに対して，以下で定義されるオートマトン$\langle A, B, C, \delta, \lambda\rangle$を，単位製造費用$\gamma$，固定費用$\phi$，市場特性$\sigma$の$n$人ベーカリーゲームといい，$BKR(\gamma, \phi, \sigma; n)$で表す．

$$A=Q^n\times Q^n\times P^n\times Q, \tag{1}$$
$$B=Q^n\times P^n, \tag{2}$$
$$C=Q^n\times Q^n\times Q^n, \tag{3}$$

$\delta: C\times A\to C$と$\lambda: C\times A\to B$は，任意の$c=(c_R, c_Q, c_I)\in C$，$x=(x_R, x_Q, x_P, \alpha)\in A$に対して，それぞれ

$$\delta(c, x)=(x_R, \min(c_I+c_R, x_Q), \max(c_I+c_R-x_Q, 0)) \tag{4}$$
$$\lambda(c, x)=(n\alpha\sigma(x_P), \mathrm{diag}(x_P)(\min(n\alpha\sigma(x_P), c_Q))^T-\gamma c_Q-\phi\mathbf{1}) \tag{5}$$

をみたす．

上の定義において，diagは，$x=(x_1, \cdots, x_n)\in\mathbb{R}^n$から$y_{ij}=0(i\neq j)$，$y_{ii}=x_i$となるような対角行列$(y_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$を与える関数である．また，minは$(a_1, \cdots, a_n), (b_1, \cdots, b_n)\in\mathbb{R}^n$に対して，$(\min(a_1, b_1), \cdots, \min(a_n, b_n))\in\mathbb{R}^n$を与える関数である．また，オートマトン$\langle A, B, C, \delta, \lambda\rangle$において，各要素はそれぞれ，入力アルファベット，出力アルファベット，状態アルファベット，状態遷移関数，出力関数と呼ばれる．

入力アルファベットは，システムへの入力を表し，ここではn人の意思決定値の組，および平均需要が入力として与えられる．入力アルファベット$(x_R, x_Q, x_P, \alpha)\in A$において，$x_R$は，各プレイヤーの決定した材料調達個数$(r_1, \cdots, r_n)\in Q^n$を表し，$x_Q$は，各プレイヤーの決定し

た製品製造指示数$(q_1, \cdots, q_n)\in Q^n$を表し，また$x_P$は，各プレイヤーの決定した製品販売価格$(p_1, \cdots, p_n)\in P^n$を表す．最後の$\alpha$は，プレイヤー１人当たりの平均需要を表す．したがって実際の総需要は$n\alpha$となる．

出力アルファベットは，システムからの出力を表し，出力アルファベット$(y_D, y_\pi)\in B$において，y_Dは各プレイヤーに対する需要$(d_1, \cdots, d_n)\in Q^n$を表す．ここで，需要は$(d_1, \cdots, d_n)=n\alpha\sigma(p_1, \cdots, p_n)$のように市場占有率関数によって決定されるが，$\sigma$の条件より$1(d_1, \cdots, d_n)^T=(n\alpha)1\sigma(p_1, \cdots, p_n)^T=n\alpha$であるから，$\sum_{i=1}^n d_i=n\alpha$が成立する．また，$y_\pi$は各プレイヤーの営業利益$(\pi_1, \cdots, \pi_n)\in P^n$を表す．

状態アルファベットは，システムの状態を表す．状態アルファベット$(c_R, c_Q, c_I)\in C$において，c_Rは各プレイヤーのサプライヤーに対する注文済み材料調達数を表し，c_Qは各プレイヤーの指示済みの製造個数，c_Iは各プレイヤーの材料在庫数を表す．定義２では，時間の概念は明示的に述べられていないが，c_R, c_Q, c_Iは，それぞれ前期材料調達数，前期製造指示数，今期期末在庫数を意味する．

オートマトンによるシステムモデルは，差分方程式でシステム表現を与えることができる（高原・飯島1990；高原1991）．いま，$c_t(t=0, 1, 2\cdots)$をt期末のシステムの状態とし，x_tをtにおける入力，y_tをt期における出力とすれば，状態遷移と出力の関係は

$$\begin{aligned} c_t &= \delta(c_{t-1}, x_t), \\ y_t &= \lambda(c_{t-1}, x_t) \end{aligned} \tag{6}$$

と書くことができる[注1)]．

ベーカリーゲーム$BKR(\gamma, \phi, \sigma; n)=\langle A, B, C, \delta, \lambda\rangle$において，定数$\rho\in Q$を用いて，初期状態を$c_0=(\rho1, \rho1, 0)$と定義し，$t$期の入力を$x_t=(R_t, Q_t, P_t, a_t)$で表すことにする．このとき，列$\{I_t\}$を$I_0=0$と関係式$I_t=\max(I_{t-1}+R_{t-1}-Q_t, 0)(t=1, 2, \cdots)$（ただし，$R_0=Q_0=\rho1$）で定めると，任意の$t=1, 2, \cdots$について，

$$c_t=(R_t, \min(I_{t-1}+R_{t-1}, Q_t), I_t)=(R_t, I_{t-1}+R_{t-1}-I_t, I_t) \tag{7}$$

がなりたつことが分かる（付録１）．さらに，便宜的に$I_{-1}=0$, $R_{-1}=\rho1$とし，$\tilde{Q}_t=I_{t-1}+R_{t-1}-I_t$とおくと，任意の$t=1, 2, \cdots$について，

$$y_t=(n\alpha\sigma(P_t), \mathrm{diag}(P_t)(\min(n\alpha\sigma(P_t), \tilde{Q}_{t-1}))^T-\gamma\tilde{Q}_{t-1}-\phi1) \tag{8}$$

が成り立つことも容易に確かめることができる．

３．市場占有率関数

販売型ビジネスゲームにおいては，市場規模は絶対的な大きさではなく，通常プレイヤー数に応じて設定される．例えば，1000人の顧客を想定した10人向けのゲームではプレイヤー１人あたりの平均需要（顧客数）は100人であるが，これを同じ顧客数の設定下で20人でプレイした

場合，各プレイヤーに対する平均需要はもとの設定の半分の50人となる．特に，平均需要が損益分岐点数を下回る場合，利益の出ないゲーム設定となり，ビジネスゲームとしては望ましい状態とは言えなくなる．このような理由から，通常はプレイヤー１人当たりの平均需要を事前に設定しておき，プレイヤー数に応じて動的に総需要を逆算する方法が取られる．前節で，総需要を$n\alpha$と表したのは，このためである．

さて，ベーカリーゲーム$BKR(\gamma, \phi, \sigma; n)$の入力$(x_R, x_Q, x_P, \alpha)$対して，各プレイヤーの製品販売価格を$x_P=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$で表し，そのときの各プレイヤーの市場占有率を$(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$で表すことにしよう．プレイヤーの役割や立場が市場において対等であるとき，市場占有率が，販売価格に関する何らかの指標の按分で決定されることを要請することはきわめて自然である．そこで，関数$f: P \to \mathbb{R}$を用いて，各プレイヤーの市場占有率が

$$\sigma_i=\frac{f(p_i)}{\sum_{j=1}^{n} f(p_j)}\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{9}$$

と書けるとしよう．このとき，$i=1, 2, \cdots, n$に対して

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_i}{\partial p_i}&=\frac{f'(p_i)}{f(p_i)}(1-\sigma_i)\sigma_i\\&=(\log f(p_i))'(1-\sigma_i)\sigma_i\end{aligned} \tag{10}$$

であることが示される（付録２）．また，市場占有率に対する価格の弾力性は，

$$\frac{\partial \log\sigma_i}{\partial \log p_i}=\frac{\partial \sigma_i}{\partial p_i}\cdot\frac{p_i}{\sigma_i}=p_i(\log f(p_i))'(1-\sigma_i) \tag{11}$$

となる．ここで，価格弾力性が関数fの影響を受けないと仮定するならば，$(\log f(x))'=-\lambda$とおいて微分方程式を解くと，$f(x)=ae^{-\lambda x}$（aは定数）を得る．定数aは，市場占有率の計算過程で消去され，占有率に影響を与えないので$a=1$としても一般性は失われない．さらに$\lambda>0$ならば$f(x)=e^{-\lambda x}$は正値単調減少関数となるから，これを価格xに対する価格力を表す指標として用いることが可能となる．

一方，価格弾力性が他プレイヤーの市場占有率合計$1-\sigma_i$に比例すると仮定するならば，$x(\log f(x))'=-m$とおいて微分方程式を解くと，$f(x)=ax^{-m}$（aは定数）と書ける．指数関数型価格力同様に，$a=1$とおいても一般性を失わない．$m>0$ならば，$x>0$において$f(x)=x^{-m}$は正値単調減少であるから，この場合も価格力を表す指標として用いることができる．

いま，ベーカリーゲームのプレイヤー数を$n+1$として，$BKR(\gamma, \phi, \sigma; n+1)$を考える．プレイヤー$i\,(i=1, \cdots, n)$が同じ価格$\bar{p}$で商品を販売し，プレイヤー$n+1$のみが$x$で販売するときのプレイヤー$n+1$の市場占有率$\sigma(x)$を考えよう．すると，価格$x$に対する価格力が$f(x)=x^{-m}(m>0)$のときは，

$$\sigma(x)=\frac{x^{-m}}{n\bar{p}^{-m}+x^{-m}}=\frac{1}{n\left(\dfrac{\bar{p}}{x}\right)^{-m}+1}=\frac{1}{nf\left(\dfrac{\bar{p}}{x}\right)+1} \tag{12}$$

と書ける．一方，価格力が $f(x)=e^{-\lambda x}(\lambda>0)$ のときは，

$$\sigma(x)=\frac{e^{-\lambda x}}{ne^{-\lambda\bar{p}}+e^{-\lambda x}}=\frac{1}{ne^{-\lambda(\bar{p}-x)}+1}=\frac{1}{nf(\bar{p}-x)+1} \tag{13}$$

となる．これらは，プレイヤー $n+1$ の価格力を1に正規化したときの他プレイヤーの平均価格力を表している．すなわち，$f(x)=x^{-m}$ のときは，他プレイヤーの平均価格力は $f(\bar{p}/x)$ であり，$f(x)=e^{-\lambda x}$ のときは，$f(\bar{p}-x)$ となる．

4．価格力関数

ここでは，価格力を表す関数 f の持つべき性質について考察する．そのために，f を正の実数上定義された，連続かつ微分可能な正値単調減少関数とする．ベーカリーゲーム $BKR(\gamma, \phi, \sigma; n)$ において，プレイヤー $i\,(i=1, \cdots, n)$ の販売価格を p_i，そのときの市場占有率を σ_i とするとき，プレイヤー n の市場占有率は，式(9)より

$$\sigma_n=\frac{f(p_n)}{f(p_n)+\sum_{j=1}^{n-1}f(p_j)}=\left(1+\frac{\sum_{j=1}^{n-1}f(p_j)}{f(p_n)}\right)^{-1} \tag{14}$$

のように書くことができる．また，他のプレイヤー $i\,(i=1, \cdots, n-1)$ についても同様の形で書くことができる．もし市場が十分大きくかつ安定的であるならば，プレイヤー n 以外のプレイヤーの市場占有率の総和 $\sum_{j=1}^{n-1}f(p_j)$ は変動しないと仮定できる．すると，特定プレイヤーの市場占有率を考察する際に，他プレイヤーのそれを個別に考慮する必要が無くなり，解析上の取り扱いが容易となる．そこで，A を適当な正定数として，

$$h(x)=\frac{f(x)}{f(x)+A}=\left(1+\frac{A}{f(x)}\right)^{-1} \tag{15}$$

と定義される関数 $h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ を導入する．$h(x)$ は，販売価格が x であるときの市場占有率を表す．なお，ここでの A は，ベーカリーゲームのオートマトン表現 $\langle A, B, C, \delta, \lambda\rangle$ の A とは異なることに注意されたい．

さらに，c を正定数として，

$$H_c(x)=(x-c)h(x) \tag{16}$$

で定義される関数 $H_c:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ も導入する．市場における総需要が D であるとき，$H_c(x)D$ は，単位製造費用が c，販売価格が x であるときの売上総利益を表す．したがって関数 H_c が定義域において最大値を持つとき，売上総利益を最大にする販売価格が存在する．ベーカリーゲームでは，販売費及び一般管理費は固定費 ϕ（定数）として取り扱われるため，H_c が最大値をもつとき，営業利益を最大にする販売価格が存在する．この価格のことを最適販売価格と呼ぶことにする．

ゲーム状況においては，最適販売価格とそのときの需要数のみならず，最適販売価格周辺での需要数と利益が分析できる方が都合がよい．もし，H_c が単峰性（unimodality）を満たすな

らば，$H_c(x)$がある閾値以上であるようなxの範囲を特定できるようになる．そこで，H_cが単峰であるための条件について考える．

H_cをxで微分すると

$$H'_c(x)=\frac{f(x)(f(x)+A)+A(x-c)f'(x)}{(f(x)+A)^2} \tag{17}$$

を得るから，H_cが単峰であるためには，$\varphi(x)=f(x)(f(x)+A)+A(x-c)f'(x)$とおくとき，$c<\xi$を満たす実数$\xi$が存在して，$c\leqq x<\xi$ならば$\varphi(x)>0$，また$\xi<x$ならば$\varphi(x)<0$である必要がある．$y=f(x)$とおくと，$\varphi(x)=y^2+Ay+A(x-c)y'$と書けるが，これはさらに

$$\varphi(x)=y^2(1+Ay^{-1}-A(x-c)(y^{-1})') \tag{18}$$

と書ける．ここで$Y=y^{-1}$とおくと，

$$\varphi(x)Y^2=AY'\left\{\frac{Y+A^{-1}}{Y'}-(x-c)\right\} \tag{19}$$

を得る．$Y'<0$であるから$\varphi(x)$の符号は，右辺の中括弧内の符号で決定される．そこで，さらに$u(x)=(Y+A^{-1})/Y'-(x-c)$とおいて，微分方程式を解くと

$$f(x)=A\left(\exp\left(\int\frac{dx}{u(x)+x-c}\right)-1\right)^{-1} \tag{20}$$

を得る．よって，ある実数ξが存在して，$x<\xi$の範囲で$u(x)>0$，かつ$\xi<x$の範囲で$u(x)<0$であれば，$\varphi(x)$は単峰となる．このような$u(x)$の中で最も単純なものは，一次関数である．特に，$u(x)=-(1-a)x+(b+c)(0\leq a<1,\ b>0)$のとき，簡単な計算によって

$$\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{A}=\begin{cases}K(ax+b)^{\frac{1}{a}} & (0<a<1),\\ Ke^{\frac{x}{b}} & (a=0)\end{cases} \tag{21}$$

となる価格力関数$f(x)$を得ることができる．ただしKは定数であり，$f(x)>0$であるために$AK>1$が必要である．これらの関数系は，

$$\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{A}=(ax+b)\left(\frac{1}{f(x)}\right)'\quad(0\leq a<1,\ b>0) \tag{22}$$

という条件を満たす．あるいは，

$$f(x)\left(1+\frac{1}{A}f(x)\right)=-(ax+b)f'(x)(0\leq a<1,\ b>0) \tag{23}$$

と書いてもよい．関数fがこの条件を満たすとき$f'(x)<0,\ f''(x)>0,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$を示すことができる（付録３）．

命題１ $f(x)(1+A^{-1}f(x))=-(ax+b)f'(x)(0\leq a<1,\ b>0)$のとき，$H_c(x)$は単峰．

証明 $y=f(x)$とおくと，

$$H'_c(x)=\frac{Ay^2(A^{-1}+y^{-1}-(x-c)(y^{-1})')}{(y+A)^2}$$
$$=\frac{Ay^2}{(y+A)^2}\{(ax+b)(y^{-1})'-(x-c)(y^{-1})'\} \tag{24}$$
$$=\frac{A}{(y+A)^2}\{-(1-a)x+b+c\}(-y')$$

を得る．$y'<0$であり，$0<1-a\leq 1$, $b+c>0$であるから，$0<x<(b+c)/(1-a)$の範囲で$H'_c(x)>0$，そして$x>(b+c)/(1-a)$の範囲で$H'_c(x)<0$となる．よってH_cは単峰．■

式(23)において，Aが十分大きいときは$A^{-1}f(x)$を無視できる．したがって，

$$f(x)=-(ax+b)f'(x)(0\leq a<1,\ b>0) \tag{25}$$

という条件を満たす関数系を考えることができる．微分方程式を解いて具体的に求めると，$f(x)=K^{-1}(ax+b)^{-\frac{1}{a}}$（$0<a<1$のとき），あるいは$f(x)=K^{-1}e^{-\frac{x}{b}}$（$a=0$のとき）となる．したがって$f'(x)<0$，$f''(x)>0$，$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$であることが直接的計算によって確かめられる．さらに次の命題によってH_cが単峰であることが分かる．

命題２ $f(x)=-(ax+b)f'(x)(0\leq a<1,\ b>0)$のとき，$H_c(x)$は単峰．
証明 $\varphi(x)$が$H'_c(x)$の符号を決定し，$\varphi(x)=-Af'(x)u(x)$と書けるから，$u(x)$を調べる．まず，$0<a<1$，すなわち$f(x)=K^{-1}(ax+b)^{-\frac{1}{a}}$のとき，

$$u(x)=A^{-1}K^{-1}(ax+b)^{1-\frac{1}{a}}-(1-a)x+b+c \tag{26}$$

$$u'(x)=-(1-a)\left\{1-A^{-1}K^{-1}(ax+b)^{-\frac{1}{a}}\right\} \tag{27}$$

を得る．明らかに$u(0)>0$．方程式$u'(x)=0$の解をξとすると，$\xi=\dfrac{1}{a}(A^{-a}K^{-a}-b)$であるから，$u'(x)$の符号の変化から$u(x)$は$0<x\leq\xi$の範囲で単調増加，$x\geq\xi$の範囲では単調減少であることが分かる．また，$x\to\infty$のとき$u(x)\to-\infty$であるから，十分大きな$x_0$をとれば，$x\geq x_0\Rightarrow u(x)<0$となることも分かる．よって$H_c$は単峰．

次に$a=0$，すなわち$f(x)=K^{-1}e^{-\frac{x}{b}}$のとき，

$$u(x)=bA^{-1}K^{-1}e^{-\frac{x}{b}}-x+b+c \tag{28}$$

$$u'(x)=-A^{-1}K^{-1}e^{-\frac{x}{b}}-1 \tag{29}$$

を得る．明らかに$u(0)>0$．また$u'(x)<0$だから$u(x)$は単調減少，かつ$x\to\infty$のとき$u(x)\to-\infty$となる．よってH_cは単峰．■

命題1，2における定数aの条件$0 \leq a < 1$のうち，$0 \leq a$という条件は$f'(x) < 0$や$f''(x) > 0$などを示す際に必要となるが，実は$a < 1$という条件は不要である．しかしながら，この条件は，H_cが単峰であることを示すのに必要となる．したがって$a = 1$の場合にはH_cの単峰性は保証されない．たとえば$f(x) = K^{-1}(ax+b)^{-\frac{1}{a}}$において$a = 1$とすると，$f(x) = K^{-1}(x+b)^{-1}$を得るが，このとき$H_c(x) = (x-c)/(1+AK(x+b))$となり，$H_c(x)$は単調に増加し$A^{-1}K^{-1}$に漸近する．このように，販売金額の線形変換の逆数を価格力関数として用いると，$H_c(x)$は分数関数となり，最適販売価格は存在しない．逆数型価格力関数を用いると，希少性の高い製品を極めて高い価格で販売しても利益が確保できるという市場を想定することになるが，大量生産を前提とする製造販売型ビジネスゲームにとっては，このような市場の想定は望ましいとは言えない．その意味で，命題1，2におけるaの条件は極めて重要である．なお，$0 < a < 1$であるときは，$b = 0$の場合を含めてもよい．この場合，命題2においては，価格力関数は$f(x) = x^{-m}$の形となる

5．プレイヤー戦略への応用

この節では，市場占有率関数の性質を戦略評価に応用する例を紹介するため，ベーカリーゲーム$BKR(\gamma, \phi, \sigma; n)$における特定のプレイヤーに着目し，そのプレイヤーが取りうる二つの製造販売戦略を営業利益の観点から比較する．ここで比較する戦略のひとつ目は，需要の不確実性に起因する品切れをなるべく回避し，安定したサービス水準を維持するために安全在庫をもつという戦略（以下，SSMと呼ぶ）である．そして，ふたつ目の戦略は，調達，製造，販売の各プロセスにおけるモノの流れ（スループット）をなるべく一定に保ち，販売価格によって製品をつねに売り切ることを目指す戦略（以下，THMと呼ぶ）である．

準備としてプレイヤー nを議論対象として固定し，このプレイヤーの販売価格xに対する顧客需要を$g(x)$で表す．いま総需要が$n\alpha$のとき，$g(x)$が価格力関数fと正定数Aを用いて

$$g(x) = n\alpha \frac{f(x)}{f(x)+A} \tag{30}$$

と書けるとする．このとき，製品製造個数q，および製品販売価格xに対する営業利益$\pi_q(x)$は，

$$\pi_q(x) = x \min(g(x),\ q) - \gamma q - \phi \tag{31}$$

と表される．THM戦略において，販売価格をxとするときの理想的な製品製造個数は$g(x)$であるから，そのときの営業利益は，

$$\pi_{g(x)}(x) = (x-\gamma)g(x) - \phi \tag{32}$$

となるが，SSM戦略においては，安全在庫水準をs，販売価格をyとすると，営業利益は

$$\pi_s(y) = y \min(g(y),\ s) - \gamma s - \phi \tag{33}$$

と表される．このとき $\pi_{g(x)}(x) \geq \pi_s(y)$ となる条件を，特定の価格力関数 $f(x)=e^{-\lambda}(\lambda>0)$ の場合に求めてみよう．前節と同様，$h(x)=g(x)/n\alpha$ を導入すれば，$h(x)$ は

$$h(x)=\frac{1}{1+Ae^{\lambda x}} \tag{34}$$

とシグモイド関数として表される．

さて $g(y)<s$ のとき $\pi_s(y)=yg(y)-\gamma s-\phi$ であり，$g(y)\leq s$ のときは $\pi_s(y)=(y-\gamma)s-\phi$ であるから，$\pi_{g(x)}(x) \geq \pi_s(y)$ となる条件は，

$$\text{（ｉ）}\ (x-\gamma)g(x) \geq yg(y)-\gamma s \quad (g(y)<s\text{のとき}) \tag{35}$$
$$\text{（ⅱ）}\ (x-\gamma)g(x) \geq (y-\gamma)s \quad (g(y)\geq s\text{のとき}) \tag{36}$$

と書くことができる．

まず，（ｉ）の場合を考える．条件式を $n\alpha$ で除して整理すると

$$(x-\gamma)h(x)+\frac{\gamma s}{n\alpha} \geq yh(y) \tag{37}$$

という条件を得る．ここで，右辺の最大値を求めるために，関数 $xh(x)$ を微分すると，

$$\frac{d}{dx}(xh(x))=\left(\frac{1}{1+Ae^{\lambda x}}\right)'=\frac{1+Ae^{\lambda x}-A\lambda xe^{\lambda x}}{(1+Ae^{\lambda x})^2} \tag{38}$$

となるから，$xh(x)$ が極値をとる x は，$A(\lambda x-1)e^{\lambda x}=1$ を満たす．この両辺を $e\,A$ で除すると

$$(\lambda x-1)e^{\lambda x-1}=\frac{1}{Ae} \tag{39}$$

を得るからランベルトの W 関数[注2)] を用いると $\lambda x-1=W(A^{-1}e^{-1})$ と表される．結局，$xh(x)$ は

$$x=\frac{1}{\lambda}(W(A^{-1}e^{-1})+1) \tag{40}$$

のときに最大値をとる．この x を ξ とおくと，$A(\lambda\xi-1)e^{\lambda\xi}=1$ を満たすから，$h(\xi)=(1+Ae^{\lambda\xi})^{-1}=(A\lambda\xi e^{\lambda\xi})^{-1}$ となり，最大値は

$$\xi h(\xi)=\frac{\xi}{A\lambda\xi e^{\lambda\xi}}=\frac{A(\lambda\xi-1)}{A\lambda}=\xi-\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}W\left(\frac{1}{Ae}\right) \tag{41}$$

と表される．したがって，SSMにおける安全在庫 s に対して，THMにおける販売価格 x が

$$(x-\gamma)h(x)+\frac{\gamma s}{n\alpha} \geq \frac{1}{\lambda}W\left(\frac{1}{Ae}\right) \tag{42}$$

を満たすならば，つねに $\pi_{g(x)}(x) \geq \pi_s(y)$ となることが分かる．

式(42)が成り立つような x の範囲を求めてみよう．そのために，$(x-\gamma)h(x)=H_\gamma(x)$ の最大

値を求める．$H'_\gamma(x)=0$ の解は，命題2の式(28)において，$b=\dfrac{1}{\lambda}$, $K=1$, $c=\gamma$ とおいて，$u(x)=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}e^{-\lambda x}-x+\dfrac{1}{\lambda}+\gamma=0$ となる x に一致する．よって，極値をとる x は $(\lambda x-\lambda\gamma-1)Ae^{\lambda x}=1$ の解となり，この両辺を $Ae^{\lambda y+1}$ で除すれば

$$(\lambda x-\lambda\gamma-1)Ae^{\lambda x-\lambda\gamma-1}=\frac{1}{Ae^{\lambda\gamma+1}} \tag{43}$$

となるから，

$$x=\frac{1}{\lambda}W\left(\frac{1}{Ae^{\lambda\gamma+1}}\right)+\frac{1}{\lambda}+\gamma \tag{44}$$

を得る．この x を η とおくと，$(x-\gamma)h(x)$ の最大値は，

$$(\eta-\gamma)h(\eta)=\frac{1}{\lambda Ae^{\lambda\eta}}=\frac{\lambda\eta-\lambda\gamma-1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}W\left(\frac{1}{Ae^{\lambda\gamma+1}}\right) \tag{45}$$

となる．この結果から，式(42)は

$$\frac{1}{\lambda}W\left(\frac{1}{Ae^{\lambda\gamma+1}}\right)\geq(x-\gamma)h(x)\geq\frac{1}{\lambda}W\left(\frac{1}{Ae}\right)-\frac{\gamma s}{n\alpha} \tag{46}$$

と表されるから，$\pi_{g(x)}(x)\geq\pi_s(y)$ を満たす x が存在するための s の条件は，

$$s\geq\frac{n\alpha}{\lambda\gamma}\left\{W\left(\frac{1}{Ae}\right)-W\left(\frac{1}{Ae^{\lambda\gamma+1}}\right)\right\} \tag{47}$$

となる．すなわち，安全在庫 s が式(47)を満たすとき，$\pi_{g(x)}(x)\geq\pi_s(y)$ を満たす販売価格 x が存在する．このとき，$H_\gamma(x)=(x-\gamma)h(x)$ の単峰性（命題2）から，$(x-\gamma)h(x)=\dfrac{1}{\lambda}W(A^{-1}e^{-1})-\dfrac{\gamma s}{n\alpha}$ を満たす解は，重複を含めて2つある．それらを α_1, $\alpha_2(\alpha_1\leq\alpha_2)$ とおくと，任意の $x\in[\alpha_1, \alpha_2]$ に対して，$\pi_{g(x)}(x)\geq\pi_s(y)$ であることが言える．

次に，(ⅱ)の場合を考える．この場合，SSMにおける安全在庫 s は，需要 $g(y)$ を満たしていないため，もはや安全とは言えない．したがって，SSMにおいて $g(y)\geq s$ であるような価格 y で製品を販売する限り，売上総利益は $(\eta-\gamma)h(\eta)$ を超えないため，$(\eta-\gamma)h(\eta)\geq(y-\gamma)s$ である限り，$\pi_{g(x)}(x)\geq\pi_s(y)$ となるようなTHMにおける販売価格 x が存在する．SSMにおける販売価格 y を固定するとき，売上総利益 $(y-\gamma)s$ は，$s=g(y)$ のとき，すなわち品切れなしで売り切るときが最大となる．一方，安全在庫 s を固定するとき，$g(y)\geq s$ の範囲では，g の単調性により $y=g^{-1}(s)$ のとき，すなわち，$s=g(y)$ のときに売上総利益が最大となる．SSMにおいて $g(y)\geq s$ の状況で最も望ましいのは，$s=g(y)$ ということになり，結果的にTHM戦略と一致する．

数値的確認

前節の議論を具体的数値で確認してみよう．そのために必要となるのが，価格力関数

$f(x)=e^{-\lambda x}$ の設定であるが，ベーカリーゲーム（白井2008）で実際に用いられているべき乗分配と同様な結果になるような当てはめを具体的に探してみると $\lambda=\dfrac{1}{250}$ を得ることができる．人数を $n=11$ とし，10人のプレイヤーがすべて700円を販売価格とする場合，

$$A=\sum_{j=1}^{10} f(x_j)=10e^{-\frac{700}{250}}\fallingdotseq 0.6081 \tag{48}$$

となるから，1プレイヤーあたりの基本需要を $\alpha=130$ として，総需要を $D=1430$ とすると，

$$g(x)=\frac{1430}{1+10e^{\frac{x-700}{250}}} \tag{49}$$

を得る．実際の値を計算すると，$g(600)=186$，$g(650)=156$，$g(700)=130$，$g(750)=108$，$g(800)=90$，$g(850)=74$，$g(900)=61$ となる．ベーカリーゲーム（白井2008）の実装で使われる価格力関数の場合には，$x=600, 650, \cdots, 850$ に対する需要は，195，158，130，107，90，76，64となり概ね良い近似を与えていることがわかる．$650\leq x\leq 850$ の範囲では，その誤差は2% 以内である．

ランベルトの W 関数の値については，ソフトウエア注2）を用いると，

$$W\left(\frac{1}{Ae}\right)=W\left(\frac{e^{9/5}}{10}\right)\fallingdotseq 0.4040 \tag{50}$$

となる．標準ベーカリーゲームでは，$\gamma=500$ と設定されているので，これを用いると

$$W\left(\frac{1}{Ae^{\lambda\gamma+1}}\right)=W\left(\frac{1}{Ae^3}\right)=W\left(\frac{1}{10\sqrt[5]{e}}\right)\fallingdotseq 0.0759 \tag{51}$$

を得る．よって，式(47)は，

$$s\geq\frac{1430}{2}(0.4040-0.0759)\fallingdotseq 234.6 \tag{52}$$

となる．したがって，安全在庫 s が235個以上のもとでは，販売価格 y が $g(y)<235$ であるとき，

$$(x-500)h(x)+500\times\frac{s}{1430}\geq 0.4040\times 250=101 \tag{53}$$

を満たす x が存在し，そのもとでは $\pi_{g(x)}(x)\geq\pi_s(y)$ が満たされる．$g(y)<235$ を解くと，$y>530.9\cdots$ を得る．したがって，SSMにおける販売価格が531円以上，安全在庫が235個以上であるときには，THMでの利益がつねにSSMでの利益より大きくなることが保証される．

たとえば，THM戦略において，スループットを90個と設定する場合，これを売り切るための販売価格は $x=g^{-1}(90)\fallingdotseq 800$ となる．したがって，SSMにおいて安全在庫が $s=240$ で品切れなしで販売する場合，式(53)の左辺を計算すると $\dfrac{14700}{143}\fallingdotseq 102.8$ となり，式(53)が成立する．すなわち $\pi_{g(x)}(x)\geq\pi_s(y)$ となる．

6．エージェント設計への応用

ベーカリーゲーム$BKR(\gamma,\ \phi,\ \sigma;\ n)$においては，教育的支援の見地から適切に振る舞う知的エージェントが必要となる場合がある．このようなエージェントは，一般のプレイヤーと同じ立場でゲームに参加し，ゲームで与えられた目的（剰余金最大化）を目指しながらも，学習者としてのプレイヤーに教育的効果を与えるよう設計される必要がある．教育的目的から，学習者が事前ゲームの結果や当該ゲームの実施を通じて推定することになるであろう市場特性のいくつかを，まったくのゼロから学習させるエージェントを設計することは実用的ではない．むしろ，学習者がゲーム後に教師から知らされても納得のいくような一定の範囲で，事前にエージェントに情報を与えておき，その情報をもとに意思決定を行うエージェントを設計するほうが，教育的に振る舞うエージェントを実現しやすい．しかしながら，本論のおもな関心は需要分配の数学的性質とその応用であるため，ここでは，強化学習などに基づく具体的な学習方法の設計と実装については取り扱わず，教育的エージェントの意思決定メカニズムを設計する際に必要となる販売価格決定の数学的側面についてのみ考察する．本節を通じて，エージェントは，弾力性パラメータmと価格力関数$f(x)=x^{-m}(m>1)$を既知であるとする．以下，何らかの方法で需要予測が行われた後の販売価格の計算方法について考察する．

売上総利益を最大にする販売価格xは，$H_\gamma(x)$を最大にするxと一致する．式(17)より，$\varphi(x)=f(x)(f(x)+A)+A(x-\gamma)f'(x)$とおくと，$H'_\gamma(x)=0$と$\varphi(x)=0$は同値となる．したがって$f(x)=x^{-m}$のとき，$\varphi(x)=x^{-m}(x^{-m}+A)-mA(x-\gamma)x^{-m-1}$となるから，$H'_\gamma(x)=0$の解は，$x^{-m}+Am\gamma x^{-1}-A(m-1)=0$の解と一致する．$x^{-1}=\sqrt[m]{A}\,t$とおいて整理すると，

$$t^m+m\gamma\sqrt[m]{A}\,t-(m-1)=0 \tag{54}$$

となるが，さらに$b=\gamma\sqrt[m]{A}$とおくと，m次方程式

$$t^m+mbt-(m-1)=0 \tag{55}$$

を得る．この方程式は，$m=2,\ 3,\ 4$については代数的に解くことができ，$m=2$のときの一般解は，$t=-b\pm\sqrt{1+b^2}$となる．tは正実数でなければならないから，$t=-b+\sqrt{1+b^2}$が採択される．$m=3$のときは，一般解は，

$$t=\sqrt[3]{1+\sqrt{1+b^3}}\,\omega^k-\sqrt[3]{-1+\sqrt{1+b^3}}\,\omega^{-k}(k=0,\ 1,\ 2) \tag{56}$$

となる．ただし$\omega=\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)/2$である．$k=0$のとき$t$が正実数となる．また，$m=4$のときは，$B=\sqrt[3]{b^2+\sqrt{1+b^4}}$とおき，さらに$c=(B-B^{-1})/2$とおくと，

$$t=\sqrt{c}\pm\sqrt{-c-b\sqrt{c^{-1}}},\ -\sqrt{c}\pm\sqrt{-c+b\sqrt{c^{-1}}} \tag{57}$$

と表される．この4つの解のうち，$t=-\sqrt{c}+\sqrt{-c+b\sqrt{c^{-1}}}$が正実数となる．しかしながら，一般に$m$が整数でない場合や5以上の整数の場合は，厳密な解を求めることはできない．そこ

で，３項方程式に対する別のアプローチによる求解の方法を示す．

ランベルト（Lambert 1758）は，３項方程式（trinomial equation）$x+q=x^m$ を解くために，これを変形した対称な形の方程式

$$x^{\alpha}-x^{\beta}=(\alpha-\beta)vx^{\alpha+\beta} \tag{58}$$

の解をべき級数として求めた．この式を v について解き，$x=1$ の周りでべき級数展開すると，

$$\begin{aligned} v&=(x-1)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)(x-1)^2\\ &+\frac{1}{6}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+3\alpha+3\beta+2)(x-1)^3\\ &-\frac{1}{24}(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3+6\alpha^2+6\alpha\beta+6\beta^2+11\alpha+11\beta+6)(x-1)^4\\ &+\frac{1}{120}(\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4+10\alpha^3+10\alpha^2\beta+10\alpha\beta^2+10\beta^3\\ &+35\alpha^2+35\alpha\beta+35\beta^2+50\alpha+50\beta+24)(1-x)^5+O((x-1)^6) \end{aligned} \tag{59}$$

を得る．ここで $(x-1)^k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ の係数は，v の $x=1$ における k 階微分係数である（付録４）．$x=1$ のとき $v=0$ であるから，x の $v=0$ における k 階微分係数（付録５）を求めることによって，逆に x を v のべき級数で表すことができる．

$$\begin{aligned} x&=1+v+\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)v^2+\frac{1}{6}(\alpha+2\beta+1)(2\alpha+\beta+1)v^3\\ &+\frac{1}{24}(\alpha+3\beta+1)(2\alpha+2\beta+1)(3\alpha+\beta+1)v^4\\ &+\frac{1}{120}(\alpha+4\beta+1)(2\alpha+3\beta+1)(3\alpha+2\beta+1)(4\alpha+\beta+1)v^5\\ &+O(v^6). \end{aligned} \tag{60}$$

同様にして，

$$\begin{aligned} x^n&=1+nv+\frac{1}{2}n(\alpha+\beta+n)v^2+\frac{1}{6}n(\alpha+2\beta+n)(2\alpha+\beta+n)v^3\\ &+\frac{1}{24}n(\alpha+3\beta+n)(2\alpha+2\beta+n)(3\alpha+\beta+n)v^4\\ &+\frac{1}{120}n(\alpha+4\beta+n)(2\alpha+3\beta+n)(3\alpha+2\beta+n)(4\alpha+\beta+n)v^5\\ &+O(v^6) \end{aligned} \tag{61}$$

を得る．

エージェントの最適価格方程式(55)を解くために，一般的な形

$$x^m + px = q(m>1,\ p>0,\ q>0) \tag{62}$$

を考える．ただし，ここでのpとqは，販売価格や製品製造個数を表すものではなく，単に方程式の係数を表している．この両辺に$(p^{m-1}/q^m)x^{m-1}$を乗じると

$$\frac{q^{m-1}}{p^m}\left(\frac{p}{q}x\right)^{2m-1}+\left(\frac{p}{q}x\right)^m=\left(\frac{p}{q}x\right)^{m-1} \tag{63}$$

を得るが，$y=(p/q)x$と変換して整理すると，

$$y^m - y^{m-1} = -\frac{q^{m-1}}{p^m}y^{2m-1} \tag{64}$$

となる．この方程式は，3項方程式のオイラーによる対称な一般形$x^\alpha - x^\beta = (\alpha-\beta)vx^{\alpha+\beta}$にあてはめると，$\alpha=m$, $\beta=m-1$, $v=-q^{m-1}/p^m$となる．上述した通りこの方程式の解は，$x=1+v+\frac{1}{2!}(\alpha+\beta+1)v^2+\frac{1}{3!}(\alpha+2\beta+1)(2\alpha+\beta+1)v^3+\cdots$と書かれる．一般に，$v^n(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$の係数を$a_n$とすれば，

$$\begin{aligned} &a_0 = a_1 = 1, \\ &a_n = \frac{1}{n!}(\alpha+(n-1)\beta+1)(2\alpha+(n-2)\beta+1) \\ &\qquad\cdots((n-1)\alpha+\beta+1)(n=2,\ 3,\ \cdots) \end{aligned} \tag{65}$$

と書ける．この級数は，少なくとも$|v|<2/\left(e\sqrt{2\alpha^2+2\beta^2}\right)$のときに絶対収束する．$\alpha=m$, $\beta=m-1$をxの展開式に代入すると，

$$\begin{aligned} x &= 1+v+\frac{1}{2!}2mv^2+\frac{1}{3!}3m(3m-1)v^3 \\ &\quad+\frac{1}{4!}4m(4m-1)(4m-2)v^4+\cdots \end{aligned} \tag{66}$$

を得る．このときv^kの係数a_kは，

$$a_k=\frac{1}{k!}mk(mk-1)\cdots(mk-k+2)\ \ (k=2,3,\cdots) \tag{67}$$

である．ここで，$(n!)^{\frac{1}{n}}\sim ne^{-1}(n\to\infty)$を用いると，

$$\sqrt[k]{|a_k|}\to\frac{m^m}{(m-1)^{m-1}}(k\to\infty) \tag{68}$$

を得るから，級数の収束条件は，

$$|\,v\,|<\frac{(m-1)^{m-1}}{m^m} \tag{69}$$

となる．一般に $m>1$ に対して

$$\frac{m^m}{(m-1)^{m-1}}<e\frac{m+(m-1)}{2} \tag{70}$$

が言える（付録６）から，これより $|\,v\,|<\dfrac{2}{e(|\,\alpha\,|+|\,\beta\,|)}=\dfrac{2}{e(2m-1)}$ ならば $|\,v\,|<\dfrac{(m-1)^{m-1}}{m^m}$ が言え，収束条件を満たすことが分かる．

それでは，最適価格方程式のべき級数によるアプローチの議論を具体的な数値で評価してみよう．最適価格方程式(54)の３項方程式表現は，

$$t^m+m\gamma\sqrt[m]{A}\,t=m-1 \tag{71}$$

となる．ここで，式(62)との対応は，

$$p=m\gamma\sqrt[m]{A},\ q=m-1 \tag{72}$$

となる．t に関する方程式を $s=(p/q)t$ として，３項方程式の一般形 $s^\alpha-s^\beta=(\alpha-\beta)vs^{\alpha+\beta}$ の形に整理すると，

$$\alpha=m,\ \beta=m-1,\ v=-\frac{q^{m-1}}{p^m}=-\frac{(m-1)^{m-1}}{m^m\gamma^m A} \tag{73}$$

を得る．s の v によるべき級数が収束するための条件は，式(69)より

$$|\,v\,|=\frac{(m-1)^{m-1}}{m^m\gamma^m A}<\frac{(m-1)^{m-1}}{m^m} \tag{74}$$

となる．これより収束条件 $\gamma\sqrt[m]{A}>1$ を得る．

ベーカリーゲーム $BKR(\gamma,\ \phi,\ \sigma;\ n+1)$ において，もしエージェント以外の n 人のプレイヤー全員が，製品を平均価格 $\bar{x}$ で販売するとき，$\sqrt[m]{A}=\sqrt[m]{n}\,/\bar{x}$ となるから，収束条件は $\gamma\sqrt[m]{A}=(\gamma/\bar{x})\sqrt[m]{n}>1$ となる．このことから，単位製造費用 γ 以上のいかなる平均販売価格 $\bar{x}$ に対しても，n を十分大きくとれば必ず収束条件を満たすことが分かる．オリジナルのベーカリーゲーム（白井2008）の設定では，$\gamma=500$ であり，販売価格の制約条件は，$300\leq x\leq 1000$ である．したがって，この制約下では平均価格 $\bar{x}$ の上限も1000となるから，収束条件は $n>2^m$ となる．$m=3$ のとき，$n>8$ だからエージェントも含めて10人以上のプレイヤーがいれば必ず収束条件を満たすことが分かる．

いま，式(73)のように α，β，v が得られたとき，

$$s=1+v+\frac{1}{2!}2mv^2+\frac{1}{3!}3m(3m-1)v^3 + \frac{1}{4!}4m(4m-1)(4m-2)v^4+\cdots \qquad (75)$$

としてsを求めることができる．そして，$t=(q/p)s$と変換することによって最適価格方程式(54)の解となるtを得る．そして，最終的に$x^{-1}=\sqrt[m]{A}\,t$という関係式によってxを求めることができる．

実際の数値を用いて，べき級数による近似解の精度を評価してみよう．ベーカリーゲーム$BKR(\gamma,\ \phi,\ \sigma;\ n+1)$において，$n=27$，$m=3$，$\gamma=500$とおいて，エージェント以外の27プレイヤーがすべて$\bar{x}=750$で製品を販売するとき$A=\sqrt[m]{n}/\bar{x}=\frac{1}{250^3}$，および$\alpha=3$，$\beta=2$，$p=2$，$q=2$，$v=-\frac{1}{54}$を得る．式(75)の右辺第$k$次項$(k=0,\ 1,\ \cdots)$を$a_k v^k$とし，$s_k=\sum_{i=0}^{k}a_i v^k$，$t_k=(q/p)s_k$，$x_k=(\sqrt[m]{A}\,t_k)^{-1}$として，実際の値を用いて計算すると表１を得る．ここで，$\hat{t}$は式(56)による厳密解(0.327480002…)を表す．

表１　べき級数展開による近似値の計算例

k	$a_k v^k$	s_k	t_k	x_k	$\hat{t}-t_k$
0	1.00000000	1.00000000	0.33333333	750.00000000	−0.00585333
1	−0.01851852	0.98148148	0.32716049	764.15094340	0.00031951
2	0.00102881	0.98251029	0.32750343	763.35078534	−0.00002343
3	−0.00007621	0.98243408	0.32747803	763.40999884	0.00000198
4	0.00000647	0.98244055	0.32748018	763.40497264	−0.00000018
5	−0.00000059	0.98243995	0.32747998	763.40543464	0.00000002
6	0.00000006	0.98244001	0.32748000	763.40538989	0.00000000
7	−0.00000001	0.98244001	0.32748000	763.40539439	0.00000000
8	0.00000000	0.98244001	0.32748000	763.40539393	0.00000000
9	0.00000000	0.98244001	0.32748000	763.40539397	0.00000000
10	0.00000000	0.98244001	0.32748000	763.40539397	0.00000000

表１より最適販売価格の整数解は$x=763$であるから，第２次近似でも実用に耐える精度であることが分かる．

７．代理シミュレーション

特定のビジネスゲームにおいてエージェントを設計する際，エージェント以外のプレイヤーの意思決定も必要となる．プレイヤー意思決定をエージェントで実装する場合，その戦略を決める必要があるが，多様な人間の意思決定を模倣することは難しい．一方で単純な戦略のみでは，設計対象のエージェントの十分なテストを行うことはできない．そこで，実際に実施された人間プレイヤーの意思決定データセットを利用し，特定のプレイヤーの意思決定のみを設計対象のエージェントで行わせるというエージェント設計手法が考えられる．本論では，このような

シミュレーション手法を代理データシミュレーション（surrogate data simulation），あるいは，単に代理シミュレーションと呼ぶことにする．しかしながら，需要分配型ビジネスゲームにおいては，設計対象のエージェントの意思決定は，それ以降の市場や他プレイヤーの状態を，もとのゲームとは異なるものに変化させる．したがって，代理シミュレーションにおいて，人間プレイヤーの意思決定の意味は，ゲーム内時間（ラウンド）が進行するにつれて無意味化していく．すなわち，各ラウンドの意思決定の意味が，各ラウンドで参照できるデータの意味と乖離していく．そこで，設計対象のエージェントの意思決定によらず，他プレイヤーの状態をもとの実施状態と同じに保つ方法を提案する．

ベーカリーゲーム$BKR(\gamma, \phi, \sigma; n+1)$を考える．プレイヤー$i(i=1, 2, \cdots, n+1)$の販売価格に関する意思決定値を$x_i$とし，各プレイヤーの市場占有率を$\sigma_i$とする．また，プレイヤー$n+1$を特別扱いし，販売価格を$x(=x_{n+1})$と書くことにする．各プレイヤーの市場占有率は，価格力関数fを用いて

$$\sigma_i=\frac{f(x_i)}{f(x)+A}(i=1, \cdots, n) \tag{76}$$

とかける．ただし，$A=\sum_{j=1}^{n}f(x_j)$である．もし，プレイヤーの販売価格に関する意思決定$x_i(i=1, \cdots, n+1)$が，実際に実施されたゲームの人間プレイヤーの値であるときは，Aの値は実際のデータを用いて計算することができる．

このデータを用いて，代理シミュレーションを行うために，プレイヤー$n+1$をエージェント，それ以外の$i=1, 2, \cdots, n$を人間プレイヤーだと仮定する．エージェント（プレイヤー$n+1$）の販売価格意思決定の値をζとし，それ以外のプレイヤーの意思決定をもとのデータと同じ$x_i(i=1, 2, \cdots, n)$だとして，各プレイヤーiの市場占有率τ_iを求めると，

$$\tau_i=\frac{f(x_i)}{f(\zeta)+\sum_{j=1}^{n}f(x_j)}=\frac{f(x_i)}{f(\zeta)+A}(i=1, 2, \cdots, n) \tag{77}$$

となるが，上の２つの式より

$$\frac{1}{\tau_i}-\frac{1}{\sigma_i}=\frac{f(\zeta)-f(x)}{f(x_i)}(i=1, 2, \cdots, n) \tag{78}$$

を得る．このことから，プレイヤー$n+1$の代理シミュレーション時とゲーム実施時の価格意思決定値の差$f(\zeta)-f(x)$を固定するならば，各プレイヤーの市場占有率の逆数の差は，ゲーム実施時の人間プレイヤーの価格意思決定値の逆数のみに依存する．すなわち，代理シミュレーション時の各プレイヤーの市場占有率は，エージェントを除いて，自身の販売価格意思決定値のみに依存することが分かる．

ゲーム実施時の総需要をDとしたとき，代理シミュレーション実施時の総需要D'を，Dとσ_iからうまく求めて，代理シミュレーション時の各プレイヤーに対する顧客需要$\tau_i D'$をゲーム実施時の需要$\sigma_i D$と一致させることができる．なぜならば$D'\tau_i=D\sigma_i$を仮定すると，

$$
\begin{aligned}
D' &= \frac{\sigma_i}{\tau_i}D = \sigma_i\left\{\frac{f(\zeta)-f(x)}{f(x_i)}+\frac{1}{\sigma_i}\right\}D \\
&= \left\{\frac{f(\zeta)-f(x)}{f(x)+A}+1\right\}D = \frac{f(\zeta)+A}{f(x)+A}D
\end{aligned}
\tag{79}
$$

となり，D' は i に依存しないからである．逆に，このようにして D' を決めてやれば，もとの需要数に一致する．このとき，エージェントの顧客需要をどのように決定すべきかという問題が生じるが，$D'f(\zeta)/(f(\zeta)+A)=Df(\zeta)/(f(x)+A)$ とする場合と，$Df(\zeta)/(f(\zeta)+A)$ とする場合の2種類が考えられる．前者は，修正後の総需要 D' を分配する考え方であり，後者は，修正前の総需要 D を分配する考え方である．エージェントが総需要やエージェント自身の顧客需要を予測するモデルを内包する場合は，修正前のもとの需要 D を用いたほうが，ゲーム実施時と同じ状況でのシミュレーションに近くなる．その場合，真の総需要 $\hat{D}$ は

$$
\begin{gathered}
\hat{D} = \frac{f(\zeta)}{f(\zeta)+A}D - \frac{f(x)}{f(x)+A}D + D = (\tau-\sigma+1)D \\
\left(\text{ただし，}\tau = \frac{f(x)}{f(\zeta)+A}\text{，}\sigma = \frac{f(x)}{f(x)+A}\right)
\end{gathered}
\tag{80}
$$

と表される．代理シミュレーションの需要分配の違いについては，表２にまとめた．

表２　代理シミュレーションの需要分配方式の違い

	ゲーム実施データ			代理シミュレーション			
プレイヤー	価格	占有率	需要	価格	占有率	需要方式１	需要方式２
1	x_1	σ_1	$D\sigma_1$	x_1	τ_1	$D'\tau_1 = D\sigma_1$	
2	x_2	σ_2	$D\sigma_2$	x_2	τ_2	$D'\tau_2 = D\sigma_2$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
n	x_n	σ_n	$D\sigma_n$	x_n	τ_n	$D'\tau_n = D\sigma_n$	
$n+1$	x	σ	$D\sigma$	ζ	τ	$D'\tau$	$D\tau$
合計	—	1	D	—	1	$D'=(\sigma/\tau)D$	$\hat{D}=(\tau-\sigma+1)D$

※プレイヤー $n+1$ がエージェントを表す．

YBGでの実装例

ベーカリーゲームは，横浜ビジネスゲーム（YBG, Yokohama Business Game）というビジネスゲームの開発，実施，運用を支援するシステムで実装されている（白井2009）が，YBGは，ビジネスゲームを開発するための簡易言語（Business Model Description Language）も提供している（横浜国立大学経営学部2008）．本節では，YBGを用いて代理シミュレーションを行うための実装方法について述べる．ここでは，エージェントへの需要分配は，修正後総需要 D' を用いる．D' は，式(79)より

$$
D' = \frac{f(\zeta)}{f(x)}\sigma D + D - \sigma D \tag{81}
$$

と書ける．ここで，σD はプレイヤー $n+1$ の顧客需要（来店者数）を表している．

いま，ゲーム実施に用いたモデルにおいて，「商品需要」（総需要）が各プレイヤーの「製品不人気度」の逆数によって按分されるものとしよう．

```
scon 商品需要 0 D1 D2…Dk
tlet 製品不人気度＝1/f（販売価格）
pinv 来店者数＝商品需要 by 製品不人気度
```

これを，次のようにモデルを修正することで，理論上，エージェント以外の受注数量をもとのままにすることができる．ただし，以下の「チーム１」はエージェント，すなわちプレイヤー $n+1$ を表すものとする．

```
scon 商品需要 0 D1 D2…Dk
scon チーム１の販売価格 0 p1 p2…pk
                              （中略）
tlet 製品不人気度＝1/f（販売価格）
pinv 本来来店者数＝商品需要 by 製品不人気度
tlet if（チーム＝1）{
      修正商品需要＝本来来店者数/（f（チーム１の販売価格）＊製品不人気度）
                  ＋商品需要－本来来店者数}
pinv 来店者数＝修正商品需要 by 製品不人気度
tlet if（チーム＝1）{来店者数＝本来来店者数＊商品需要/修正商品需要}
```

この例は，前節の理論的考察に忠実だが，計算上の精度を考慮していない．実際，上記のコードをYBGで実装して，ゲーム実施時のデータと比較すると，エージェント以外のプレイヤーの来店者数に関しては，１人程度の丸め誤差が確認できる．これを回避するには，エージェント以外のプレイヤーに対する来店者数をもとのモデルと同様に先に計算しておき，そのあとで「修正商品需要」D' を求め，D' をエージェントの販売価格を考慮した「修正製品不人気度」で分配したものを「エージェント来店者数」にすればよい．以下に実際のコードの一部を示す．

```
tlet 製品不人気度＝1/f（販売価格）
pinv 来店者数＝商品需要 by 製品不人気度
tlet if（チーム＝1）{
      修正商品需要＝来店者数＊製品不人気度＊f（エージェント販売価格）
                  ＋商品需要－来店者数}
tlet if（チーム＝1）{販売価格＝エージェント販売価格}
tlet 修正製品不人気度＝1/f（販売価格）
pinv エージェント来店者数＝修正商品需要 by 修正製品不人気度
tlet if（チーム＝1）{来店者数＝エージェント来店者数}
```

ベーカリーゲームのように，販売価格によって需要が分配されるビジネスゲームにおいては，

代理シミュレーション時のエージェント以外のプレイヤーに対する顧客需要を，ゲーム実施時のそれと一致させることによって，エージェントのパフォーマンスをゲーム実施時の状況下で解釈できる．このことを上述したTHMとSSM戦略の比較に用いると，実施されたゲーム状況下において，THMやSSM戦略をとっていたら，どのような結果に終わっていたかをゲーム実施時の状況下で考察できる．

8．おわりに

本論では，ビジネスゲームを設計する際に問題となる需要分配の方法に焦点を当て，市場占有率関数の持つべき条件や性質とその応用について述べるとともに，ゲーム設計に対する新しい方法の提案を行った．まず，需要分配を考察するための共通の土台として，ベーカリーゲームとよばれる製造販売型ビジネスゲーム $BKR(\gamma, \phi, \sigma; n)$ をオートマトンとして定式化した．そして，ベーカリーゲームを例に，製造販売型ビジネスゲームの市場占有率関数と価格力関数の数理的性質とビジネスゲームで用いる際に望ましい満たすべき諸条件について述べた．とくに価格力関数 $f(x)=x^{-m}$ に対しては，最適販売価格が存在するためには $m>1$ が必要である．プレイヤー戦略への応用として，THMとSSMという２つの戦略をモデル化し，営業利益に関する評価を行ない，THM戦略がSSM戦略に勝るための条件を与えた．エージェント設計への応用として，最適価格方程式の求解アプローチを示した．そして，べき級数展開による近似解法が，べき級数の収束条件に関して，すでに実装されているベーカリーゲームの設定でも十分適用できることを示した．また，特定の価格弾力性パラメータと特定の数値的設定に対する，最適価格方程式の厳密解とべき級数解法を比較し，実用に耐える精度であることも確認した．この方法は，本格的なプログラミングを行うことなく実装可能であり，したがってYBGでも十分利用可能である．最後に，人間プレイヤーの行ったデータを用いて，特定プレイヤーをエージェントで代理させることによって戦略や市場を分析する代理シミュレーションという新しい概念を紹介した．さらに，エージェントの決定結果によらず，各プレイヤーへの顧客需要をゲーム実施時の結果と同じに保つための方法もYBGによる実装例とともに紹介した．なお，代理シミュレーションは，エージェントの意思決定の結果が，他プレイヤーの意思決定に影響を与えないことを仮定しているため，真の意味でゲーム実施時の状況下での再解釈を可能とするものではない．可能世界（possible world）の枠組みを用いれば，このような代理シミュレーションの認識論的議論が可能となるかも知れない．

謝　辞

本研究は科研費（23530430）の助成を受けたものである．

注

1）本来は，$c_{t+1}=\delta(c_t, x_t)$, $y_{t+1}=\lambda(c_t, x_t)$ として表現されるが，ベーカリーゲームにおいては，c_t を期末の状態と見なしている．すなわち，t 期において，前期期末の状態 c_{t-1} に対して，入力 x_t が与えられて，当期期末状態 c_t に遷移すると考えて $c_t=\delta(c_{t-1}, x_t)$ として

いる.

2） W 関数の値は，数式処理ソフトウエアMathematicaでは，ProductLogという関数を用いて計算をすることができる.

参　考　文　献

白井宏明（2008）「ビジネスゲームを主体とした授業構成に関する考察」，横浜経営研究，第29巻，第３号，171-188.

白井宏明（2009）「役割の異なるプレーヤが混在するビジネスゲームの開発に関する考察」，横浜経営研究，第30巻，第１号，19-30.

高原康彦，飯島淳一（1990）「システム理論」，共立出版.

高原康彦（1991），「システム論の基礎」，日刊工業新聞社.

横浜国立大学経営学部（2008）「YBG命令解説マニュアル」.

Lambert, J. H.（1758）“Observationes variae in Mathesin Puram”, Acta Helvetica, physico-mathematico-anatomico-botanico-medica, 3, Basel, 128-168.

〔たなぶ　もとなり　横浜国立大学大学院国際社会科学研究科准教授〕

〔2011年８月16日受理〕

付録1

命題　$\langle A, B, C, \delta, \lambda\rangle$をベーカリーゲーム$BKR(\gamma, \phi, \sigma; n)$のオートマトン表現とし，$\rho \in Q$を定数とする．また，$t$期の入力を$x_t=(R_t, Q_t, P_t, a_t)\in A$とする．列$\{I_t\}$を$I_0=0$と関係式$I_t=\max(I_{t-1}+R_{t-1}-Q_t, 0)$（ただし$R_0=Q_0=\rho 1$）で定め，列$\{c_t\}$を$c_0=(\rho 1, \rho 1, 0)\in C$と関係式$c_t=\delta(c_{t-1}, x_t)(t=1, 2, \cdots)$で定めるとき，任意の$t=1, 2, \cdots$に対して

$$c_t=(R_t, I_{t-1}+R_{t-1}-I_t, I_t) \tag{82}$$

が成り立つ．

証明　一般に$I_{t-1}+R_{t-1}-I_t=min(I_{t-1}+R_{t-1}, Q_t)$が成り立つことに注意して，数学的帰納法で示す．

（ｉ）$t=1$のとき，状態遷移関数δの定義により，

$$\begin{aligned} c_1&=\delta(c_0, x_1)=\delta((\rho 1, \rho 1, 0), (R_1, Q_1, P_1, a_1)) \\ &=(R_1, \min(0+\rho 1, Q_1), \max(0+\rho 1-Q_1, 0)) \\ &=(R_1, \min(I_0+R_0, Q_1), \max(I_0+R_0-Q_1, 0)) \\ &=(R_1, I_0+R_0-I_1, I_1) \end{aligned} \tag{83}$$

であるから式(82)が成り立つ．

（ii）$t=k$のとき式(82)が成り立つとすると，

$$\begin{aligned} c_{k+1}&=\delta(c_k, x_{k+1}) \\ &=\delta((R_k, \min(I_{k-1}+R_{k-1}, Q_k), I_k), (R_{k+1}, Q_{k+1}, P_{k+1}, a_{k+1})) \\ &=(R_{k+1}, \min(I_k+R_k, Q_{k+1}), \max(I_k+R_k-Q_{k+1}, 0)) \\ &=(R_{k+1}, I_k+R_k-I_{k+1}, I_{k+1}) \end{aligned} \tag{84}$$

であるから，$t=k+1$のときも成り立つ．■

付録2

命題　市場占有率をσ_i，販売価格をp_iとするとき，$\dfrac{\partial \sigma_i}{\partial p_i}=\dfrac{f'(p_i)}{f(p_i)}(1-\sigma_i)\sigma_i$．

証明

$$\frac{1}{\sigma_i}=1+\frac{1}{f(p_i)}\sum_{j\neq i}f(p_i) \tag{85}$$

より

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{1}{\sigma_i}\right)=-\frac{f'(p_i)}{\{f(p_i)\}^2}\sum_{j\neq i}f(p_j) \tag{86}$$

を得る．一方

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{1}{\sigma_i}\right)=-\frac{1}{\sigma_i^2}\frac{\partial \sigma_i}{\partial p_i} \tag{87}$$

であるから，式(86)とあわせて

$$\frac{f'(p_i)}{\{f(p_i)\}^2}\sum\nolimits_{j\neq i}f(p_j)=\frac{1}{\sigma_i^2}\frac{\partial \sigma_i}{\partial p_i} \tag{88}$$

を得る．これより，

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial p_i}=\sigma_i^2\frac{f'(p_i)}{\{f(p_i)\}^2}\sum\nolimits_{j\neq i}f(p_j) \tag{89}$$

$$=\sigma_i^2\frac{f'(p_i)}{\{f(p_i)\}^2}\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n}f(p_j)-f(p_i)\right) \tag{90}$$

$$=\sigma_i^2\frac{f'(p_i)}{f(p_i)}\left(\frac{\sum\nolimits_{j=1}^{n}f(p_j)}{f(p_i)}-1\right) \tag{91}$$

$$=\sigma_i^2\frac{f'(p_i)}{f(p_i)}\left(\frac{1}{\sigma_i}-1\right)=\frac{f'(p_i)}{f(p_i)}(1-\sigma_i)\sigma_i \tag{92}$$

を得る．　■

付録３

命題　正の実数上定義された連続かつ微分可能な正値関数 f が，

$$f(x)(1+A^{-1}f(x))=-(ax+b)f'(x)\ (0\leq a<1,\ b>0,\ A>0) \tag{93}$$

をみたすとき $f'(x)<0$, $f''(x)>0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$.

証明

（ｉ）$f(x)(1+A^{-1}f(x))>0$，および $ax+b>0$ より $f'(x)<0$．

（ii）式(93)の両辺を微分して整理すると，$(ax+b)f''(x)=-f'(x)(a+1+2A^{-1}f(x))>0$ を得る．よって $f''(x)>0$．

（iii）f は正値だから下に有界であり，また（ｉ）より単調減少である．よって $f(x)$ は $x\to\infty$ のとき収束し，$f(x)(1+A^{-1}f(x))$ も収束する．$\lim_{x\to\infty}\{-(ax+b)f'(x)\}=\alpha\ (0\leq\alpha<\infty)$ とおくと，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$x>x_0$ ならば，$\alpha-\varepsilon<-(ax+b)f'(x)<\alpha+\varepsilon$ をみたすような x_0 が存在する．$ax+b>0$ だから，$(\alpha-\varepsilon)/(ax+b)<f'(x)<(\alpha+\varepsilon)/(ax+b)$ が $x>x_0$ について成立する．よって，$\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$．

（iv）$x>b/(1-a)$ ならば $ax+b<x$ である．このとき $f(x)<f(x)(1+A^{-1}f(x))=-(ax+b)f'(x)<-xf'(x)$ が成り立つ．ゆえに，$f(x)+xf'(x)=(xf(x))'<0$ を得る．よって，$xf(x)$ は $x>b/(1-a)$ の範囲で単調減少かつ下に有界となり収束する．$\lim_{x\to\infty}xf(x)=\beta\ (0\leq\beta<\infty)$ とおくと，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$x>x_1$ ならば $xf(x)-\beta<\varepsilon$ となるような x_1（ただし $x_1>b/(1-a)$）が存在する．よって，$0<f(x)<(\beta+\varepsilon)/x\ (x>x_1)$ が成り立つ．したがって，$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$．　■

付録4

$v=\dfrac{(x^{-\beta}-x^{-\alpha})}{(\alpha-\beta)}$ の k 階微分

$$\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=1}=1,\quad \left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=1}=-(\alpha+\beta+1), \tag{94}$$

$$\left.\frac{d^3v}{dx^3}\right|_{x=1}=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+3\alpha+3\beta+2, \tag{95}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^4v}{dx^4}\right|_{x=1}=&-(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3\\&+6\alpha^2+6\alpha\beta+6\beta^2+11\alpha+11\beta+6),\end{aligned} \tag{96}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^5v}{dx^5}\right|_{x=1}=&\,\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4\\&+10\alpha^3+10\alpha^2\beta+10\alpha\beta^2+10\beta^3\\&+35\alpha^2+35\alpha\beta+35\beta^2+50\alpha+50\beta+24.\end{aligned} \tag{97}$$

付録5

$x^{\alpha}-x^{\beta}=(\alpha-\beta)vx^{\alpha+\beta}$ であるときの x の v による k 階微分

$$\left.\frac{dx}{dv}\right|_{v=0}=\left.\left(\frac{dv}{dx}\right)^{-1}\right|_{v=0}=1, \tag{98}$$

$$\left.\frac{d^2x}{dv^2}\right|_{v=0}=-\left.\left(\frac{dv}{dx}\right)^{-3}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)\right|_{v=0}=\alpha+\beta+1, \tag{99}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^3x}{dv^3}\right|_{v=0}&=\left.\left(\frac{dv}{dx}\right)^{-5}\left(3\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2-\frac{dv}{dx}\frac{d^3v}{dx^3}\right)\right|_{v=0}\\&=(\alpha+2\beta+1)(2\alpha+\beta+1),\end{aligned} \tag{100}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^4x}{dv^4}\right|_{v=0}&=-\left.\left(\frac{dv}{dx}\right)^{-7}\left(15\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^3-10\frac{dv}{dx}\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^3v}{dx^3}+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\frac{d^4v}{dx^4}\right)\right|_{v=0}\\&=(\alpha+3\beta+1)(2\alpha+2\beta+1)(3\alpha+\beta+1),\end{aligned} \tag{101}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^5x}{dv^5}\right|_{v=0}&=\left(\frac{dv}{dx}\right)^{-9}\left(105\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^4-105\frac{dv}{dx}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2\frac{d^3v}{dx^3}\right.\\&\quad\left.\left.+15\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^4v}{dx^4}+10\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)^2-\left(\frac{dv}{dx}\right)^3\left(\frac{d^5v}{dx^5}\right)\right)\right|_{v=0}\\&=(\alpha+4\beta+1)(2\alpha+3\beta+1)(3\alpha+2\beta+1)(4\alpha+\beta+1).\end{aligned} \tag{102}$$

付録６

命題　$m>1$に対して

$$\frac{m^m}{(m-1)^{m-1}}<e\frac{2m-1}{2}. \tag{103}$$

証明　$\dfrac{x^x}{(x-1)^{x-1}}=x\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{x-1}$を$x=\infty$の周りでべき級数展開すると

$$x\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}=ex-\frac{e}{2}-\frac{e}{24x}-\frac{e}{48x^2}-\frac{73e}{5760x^3}+O((x^{-1})^4) \tag{104}$$

を得る．右辺第２項までをとって

$$\frac{x^x}{(x-1)^{x-1}}<e\left(x-\frac{1}{2}\right)\text{for any } x>1 \tag{105}$$

とできる．　■