

負債が存在するときのキャッシュフローの留保 インセンティブについて

森 田 洋

1. はじめに

経済が不景気にあって収益性の高い新規事業等実物投資の対象がさしあたって存在しないとき、企業の財務担当者は株主に利益を果たして配当の形で還元するべきか、あるいは内部に留保しておくべきか悩むという。株主の利益を重視しなくてはいけないのは当然だが、利益を蓄積しておけば投資機会が発生したとき、外部資金調達よりも機動的に資金を用意できるからである。また利益の蓄積は、例えば社債ならば格付けといった債務不履行に関する評価にも影響を与える。どれだけ企業が手元に流動性のある資産を保有しているかが、債務不履行の可能性に大きく影響を与える。

この論文では負債が存在するとき、事業から発生するキャッシュフローを留保することが株主の利益や負債の価値にどう影響するかという疑問に連続時間の無裁定理論の枠組みから一定の答えを出そうとするものである。連続時間モデルの枠組みで企業財務の論点を扱う文献では、通常事業資産の市場価値が特定の確率過程に従うことを仮定する。例えば負債価値に対する多くの研究において事業資産が幾何ブラウン運動に従うことを仮定する。またキャッシュフローの確率過程を幾何ブラウン運動とし、キャッシュフローの一定率倍として事業資産価値を定義するというものもある。

だが、キャッシュフローを配当等のペイアウトと内部留保に分配する問題を考える場合、企業の実物資産のダイナミクスについて、もう一步踏み込んだマイクロストラクチャーの記述が必要となる。なぜならキャッシュフローの水準の規模は過去にどれだけ企業の資産が蓄積され現在どの程度の規模であるかに依存するので、キャッシュフローのダイナミクスは内生的に決定されるべきものであり、既存の多くの研究のようにキャッシュフローの確率過程を外生的に与えるのは不適切だからである。

そこで本論文ではまず発生したキャッシュフローによる企業の総資産の蓄積プロセスを自然な形で記述し、その下でキャッシュフローが幾何ブラウン運動に従うときは、総資産営業利益率ないしは総資産キャッシュフロー率がいかなる性質をもつかを明らかにすることから分析をはじめ。その結果として内生的に決まるキャッシュフローの期待成長率は総資産営業利益率の平均回帰水準を意味することを示した。またこの平均回帰水準が資本コストを上回っているか否かが、キャッシュフローを再投資するべきか否かを判断する基準となっていることを示し

た。この結論は平均回帰水準を再投資の収益率という言葉で置き換えてしまえば標準的な財務論のテキストの内容と一致する。

負債が発行されているとき、株主の利益を追求するキャッシュフローの配分は必ずしも事業資産の最大化と対応しない。総資産営業利益率の平均回帰水準が資本コストと同一の場合には、キャッシュフローの配分は事業資産の価値に影響を与えないが、負債が存在するとき、キャッシュフローはすべてペイアウトとして処分されることが株主の利益を追求することになる。これは負債が存在するときには、債務不履行時における株主の有限責任性から株主資本にはオプション性が存在するからである。

我々の枠組みでは総資産営業利益率の平均回帰水準が資本コストを上回る場合、各時点における再投資に回す金額の対キャッシュフロー比率を増やすことにより、事業資産の価値を無限に大きくすることができてしまう。これはキャッシュフローが幾何ブラウン運動に従う枠組みの場合、キャッシュフローの現在価値は標準的な財務論の教科書で説明される“定率成長モデル”におけるそれと同じ性質を持つからである。そこで本論文では、一定の有限期間におけるのみ総資産営業利益率の平均回帰水準が資本コストを上回るケースを考え、その期間における利益の再投資による事業資産価値の最大化は負債が存在しても株主資本価値最大化を実現するか否かを考察した。その結果、平均回帰水準が一時的に高い水準となる場合、その水準が高いほど株主には事業資産の価値最大化から逸脱するインセンティブが発生しにくいことが明らかとなった。また負債を発行するにしても短い満期の負債を発行し、満期後において長い間平均回帰水準が高くなるようにすれば、満期前の時点において事業資産の価値最大化からの逸脱のインセンティブは発生しにくいことも明らかとなった。

ただ各パラメータが事業資産の価値最大化から逸脱しにくい値であっても、事業から発生するキャッシュフローが極めて低いときにはキャッシュフローの再投資は行われにくくなってしまふ。総資産営業利益率の平均回帰水準が時間を通じて一定とするケースから、それが確率的ではなくとも時間の経過とともに変化するケースに拡張すると、最適ペイアウトポリシーの性質は劇的に変わると、いう含意も得られる。すなわち平均回帰水準が一定の場合、キャッシュフローの分配の方針はキャッシュフローの多寡に依存しないが、平均回帰水準が時間とともに変化する場合、ペイアウトポリシーはキャッシュフローの水準に依存し、あるときはキャッシュフローを再投資し、あるときはペイアウトとして処分することが株主の利益を追求することになるのである。

本論文の構成は以下のとおりである。まず次の節でキャッシュフローが幾何ブラウン運動となるような実物資産とキャッシュフローの関係について分析を行う。次の3節においては総資産営業利益率の平均回帰水準、ペイアウトポリシー、および事業資産の価値の間に成立する関係について分析し、続く4節において負債が存在する場合における最適ペイアウトポリシーについて分析する。最後に5節で結論を述べる。

2. 実物資産とキャッシュフローのダイナミクス

$\{Z_t; t \geq 0\}$ を1次元ウィーナー過程とする。確率空間を (Ω, \mathbf{F}, P) で表すことにする。 (\mathbf{F}_t) を標準ブラウン運動の経路 $\{Z_t; t \geq 0\}$ から生成された σ -加法族を完備化したものとして定義し、これによりフィルトレーション $\mathbf{F} = \{\mathbf{F}_t; t \geq 0\}$ を定義する。またリスクフリーレートは一

定であるとし r で表す.

企業は保有する実物資産を事業活動に利用することにより各時点でキャッシュフローを生み出す. ただしこのキャッシュフローは負債がある場合には利払い前のキャッシュフロー, すなわち EBIT (Earnings Before Income and Taxes) を意味する. ただしこの論文では税金は考えない. 時点 t における実物資産の水準を A_t とし, また時点 t のキャッシュフローを CF_t とする. 後にキャッシュフローの一部のみを再投資する場合に議論を拡張するが, 全額が再投資される場合 A_t と CF_t との関係を次のように記述するのは自然であろう.

$$A_t = A_0 + \int_0^t CF_s ds, t \geq 0 \quad (1)$$

すなわち実物資産は各時点で事業から発生するキャッシュフローによって内部成長する.

連続時間の枠組みにおいて企業財務の諸論点を扱う文献においてキャッシュフローが次のように幾何ブラウン運動に従うことを仮定されることが多い.

$$dCF_t = \mu CF_t dt + \sigma CF_t dZ_t, t \geq 0 \quad (2)$$

ただし μ および σ は正の定数である. 総資産営業利益率 (return on asset) を R_t と表すことにしよう¹. すなわち $R_t = \frac{CF_t}{A_t}$ である. キャッシュフローが幾何ブラウン運動に従うとき, (1) 式の仮定は実物資産とキャッシュフローの間にどのような関係を仮定することになるのかを明らかにするのが次の命題である.

命題 1 (1) 式が成立するものとしよう. このとき以下の 3 つが同値である.

1. キャッシュフローが (2) 式に従う. \(\backslash\backslash\)
2. 総資産営業利益率が次の確率微分方程式に従う.

$$\frac{dR_t}{R_t} = (\mu - R_t) dt + \sigma dZ_t, t \geq 0 \quad (3)$$

3. キャッシュフローが次の式を満たす.

$$dCF_t = \mu dA_t + \sigma CF_t dZ_t, t \geq 0 \quad (4)$$

(証明) 1 \implies 2 の証明. (2) 式を利用して, 総資産営業利益率の定義, $R_t = CF_t / A_t$ に伊藤の補題を適用すると,

$$\begin{aligned} dR_t &= \frac{CF_t}{A_t} \mu dt + \frac{CF_t}{A_t} \sigma dZ_t - \frac{CF_t}{A_t^2} dA_t \\ &= R_t \mu dt + R_t \sigma dZ_t - R_t \frac{dA_t}{A_t} \end{aligned} \quad (5)$$

¹ 営業利益とキャッシュフローは異なるが, その違いはここでの議論に影響を与えないので以下ではキャッシュフローを総資産で割ったものを総資産営業利益率と呼んで議論を進めることにする.

を得る。(1)式より $dA_t = CF_t dt$ が成立するのでこれを(5)式に代入すると(3)式を得る。

2 \Rightarrow 1の証明。(3)式を利用して $CF_t = A_t R_t$ に伊藤の補題を適用し、さらに $dA_t = CF_t dt$ を代入すると(2)式を得る。

1 \Leftrightarrow 3の証明。確率微分方程式(2)式に(1)を利用して表現を換えると、

$$dCF_t = \mu dA_t + CF_t dZ_t$$

となる。またこの式に(1)を利用すれば(2)式を得る。(証明終わり)

(4)式右辺第1項は、キャッシュフローの変化を表す確率微分方程式のドリフト項であるからキャッシュフローの予想変化額を表す。(4)式はこの予想変化額が、実物資産の増加額と定数 μ の積であることを示している。また(3)式はこの μ が総資産営業利益率の平均回帰水準となっていると考えることができる。よって定数 μ は総資産営業利益率の長期的な平均値と解釈することもできる。

特殊なケースとして $\sigma = 0$ の場合を考えると、キャッシュフローが生成されるメカニズムは、

$$A_t = A_0 + \int_0^t CF_s ds \quad (6)$$

$$CF_t = CF_0 + \mu(A_t - A_0) \quad (7)$$

というシステムとなっている。さらに初期条件としてキャッシュフローが実物資産と総資産営業利益率の平均回帰水準との積と一致すること、すなわち $CF_0 = \mu A_0$ を仮定するときには(7)式は、 $CF_t = \mu A_t$ となり各時点の総資産営業利益率は平均回帰水準 μ に一致する²。これは不確実性を明示的に導入していないGordon (1959)のモデルに対応する。すなわち各時点において実物資産と総資産営業利益率の積としてキャッシュフローが発生しそれにより実物資産が蓄積されていくシステムである。以下では、このシステムがキャッシュフローの一部が企業内に留保される場合にも成立するとして議論を進めていくことにしよう。時点 t におけるキャッシュフローのうち留保しない部分の比率をペイアウト率と呼び、これを θ_t と表すことにしよう。ただし θ_t は F_t -可測で $\theta_t \in [0, 1]$ である。またペイアウトの金額をペイアウト額と呼び δ_t で表すことにしよう。すなわち $\delta_t = CF_t \theta_t$ が常に成立する。

仮定1 ペイアウト率の確率過程 $\{\theta_t; \theta_t \in [0, 1], t \geq 0\}$ が与えられると実物資産とキャッシュフローは次のシステムによって推移する。

$$A_t = A_0 + \int_0^t (1 - \theta_s) CF_s ds, t \geq 0 \quad (8)$$

$$dCF_t = \mu dA_t + \sigma CF_t dZ_t \quad (9)$$

² 初期条件として $CF_0 = \mu A_0$ が成立しないときには、

$$\frac{CF_t}{A_t} = \mu + \frac{CF_0 - \mu A_0}{A_t}$$

となり、実物資産が時間とともに増加していくことから、総資産営業利益率と μ の乖離は時間の経過とともに0に向かって小さくなっていく。

命題1と同じ方法により次の命題を容易に証明することが可能である。

命題2 仮定1の下では、キャッシュフローは次の確率微分方程式に従う。

$$dCF_t = \mu(1 - \theta_t)CF_t dt + \sigma CF_t dZ_t \quad (10)$$

また総資産営業利益率は次の確率微分方程式に従う。

$$\frac{dR_t}{R_t} = (1 - \theta_t)(\mu - R_t) dt + \sigma dZ_t$$

3. ペイアウトポリシーと事業資産の価値

事業資産の価値をキャッシュフローの現在価値として求めるためには市場でキャッシュフローのリスクがどう評価されているかを仮定しなくてはならない。以下では次の仮定を設ける。

仮定2 1次元ウィーナー過程 $\{Z_t; t \geq 0\}$ に関する市場のリスクプライスは一定である。

市場のリスクプライスを λ で表すこととする。確率過程 $\{Z_t^*; t \geq 0\}$ を、

$$Z_t^* = Z_t + \lambda t$$

によって定義すると、(10)式よりキャッシュフローの確率微分方程式は、

$$dCF_t = (\mu(1 - \theta_t) - \lambda\sigma)CF_t dt + \sigma CF_t dZ_t^* \quad (11)$$

と表され、ラドンニコデイル導関数 $\left. \frac{dP^*}{dP} \right|_{F_t} = e^{\int_0^t -\frac{1}{2}\lambda^2 du + \int_0^t \lambda dZ_u^*}, t \geq 0$ により定義されるマルチンゲール測度の下でのペイアウト額の期待値、すなわち確実性等価は、

$$\begin{aligned} E_t^*[\delta_s] &= E_t^*[\theta_s CF_s] \\ &= CF_t E_t^* \left[\theta_s e^{\int_t^s \mu(1 - \theta_u) - \lambda\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2 du} e^{\int_t^s \sigma dZ_u^*} \right] \\ &= CF_t E_t^* \left[\theta_s e^{\int_t^s \mu(1 - \theta_u) - \lambda\sigma du} e^{\int_t^s -\frac{1}{2}\sigma^2 du + \int_t^s \sigma dZ_u^*} \right] \end{aligned}$$

と表すことができる。ただし $E^*[\cdot]$ はマルチンゲール測度の下での条件付期待値演算子である。さらにラドンニコデイル導関数 $\left. \frac{dP^{**}}{dP^*} \right|_{F_t} = e^{\int_0^t -\frac{1}{2}\sigma^2 du + \int_0^t \sigma dZ_u^*}, t \geq 0$ によって確率測度 P^{**} を定義すると、

$$E_t^*[\delta_s] = CF_t E_t^{**} \left[\theta_s e^{\int_t^s \mu(1 - \theta_u) - \lambda\sigma du} \right] \quad (12)$$

と表すことができる。ただし、 $E^{**}[\cdot]$ は確率測度 P^{**} の下での条件付期待値演算子である。

一般にペイアウトポリシーは企業のそのときのキャッシュフローの多寡、投資機会の有無等により変動する可能性はある。したがって理論的な分析としてはペイアウトポリシーの確率過程を可能な範囲で一般的に扱うべきだが、本論文では定率型ペイアウトポリシーに焦点をしばって分析を進めることにする。1つの理由は実際の配当政策を議論するときに配当性向に対する目標水準を議論することが多いからである。特に米国の企業の場合には配当性向を特定的水準に維持しようとする企業が多い。もう1つの理由は解析的な意味で扱いが容易な点である。一般的な確率過程としてペイアウトポリシーを扱う場合、事業資産の価値や内部留保の効果を分析するのは非常に困難だからである。

仮定3 企業は定率型ペイアウトポリシーをとる、すなわち、

$$\theta_t = \bar{\theta}, t \geq 0, \bar{\theta} \in [0, 1]$$

この仮定の下では、(12)式で表される各時点のペイアウト額の確実性等価は、

$$E_t^*[\delta_s] = CF_t \bar{\theta} e^{(\mu(1-\bar{\theta}) - \lambda\sigma)(s-t)} \quad (13)$$

と簡単な形に帰着する。ペイアウト額の現在価値合計として事業資産の価値を定義し V_t で表すことにすると、不等式 $r + \lambda\sigma > \mu(1-\bar{\theta})$ が成立する限り、

$$\begin{aligned} V_t &= \int_t^\infty e^{-r(s-t)} E_t^*[\delta_s] ds \\ &= \frac{CF_t \bar{\theta}}{r + \lambda\sigma - \mu(1-\bar{\theta})} \end{aligned} \quad (14)$$

となる。 $r + \lambda\sigma > \mu(1-\bar{\theta})$ が成立しない場合には最初の等式右辺の積分は存在しない。この場合は別のアプローチから事業資産の価値を調べなくてはならない。これについては次の補題が便利である。

補題1 ある値 $\bar{\theta} \in [0, 1]$ とある時点 $s (> t)$ によって定義されるペイアウトポリシー、

$$\theta_u(s) = \begin{cases} \bar{\theta} & u < s \\ 1 & u \geq s \end{cases} \quad (15)$$

の下での時点 t における事業資産の価値は次により与えられる。

$$\begin{aligned} V_t &= \frac{CF_t}{r + \lambda\sigma} e^{(\mu(1-\bar{\theta}) - (r + \lambda\sigma))(s-t)} \\ &\quad + \bar{\theta} CF_t \frac{1 - e^{-(r + \lambda\sigma - \mu(1-\bar{\theta}))(s-t)}}{r + \lambda\sigma - \mu(1-\bar{\theta})} \end{aligned} \quad (16)$$

(証明) 数学付録を見よ。

ある $\bar{\theta}$ において $\mu(1-\bar{\theta})=r+\lambda\sigma$ が成立するとき (15) 式のペイアウトポリシー下の事業資産の価値は (16) 式の右辺第 1 項はロピタルの定理より $(s-t)\bar{\theta}CF_t$ となる。したがって時点 s を先送りすることで事業資産の価値を無限に大きくすることができてしまう。

厳密な不等式 $r+\lambda\sigma < \mu(1-\bar{\theta})$ が成立する場合にも、この $\bar{\theta}$ により定義される (15) 式のペイアウトポリシーの下では、時点 s を先送りすることでやはり事業資産の価値を無限に大きくすることができてしまう。定率型ペイアウトポリシーは $\theta_u(s)$ の s を無限に大きくしていったときの極限と解釈することができるので、実はこれが (14) 式の積分が存在しない場合に相当すると考えることができる。これまでの結果より、伊藤の補題から次の結果を得ることができる。

命題 3 仮定 1, 2, 3 の下では、不等式 $\mu(1-\bar{\theta}) < r+\lambda\sigma$ が成立するとき事業資産の価値は有限の値をとり以下の幾何ブラウン運動に従う。

$$dV_t = \mu(1-\bar{\theta})V_t dt + \sigma V_t dZ_t \quad (17)$$

したがって企業が定率型ペイアウトポリシーをとる限り、事業資産の価値に幾何ブラウン運動を仮定する Merton (1974) や Leland (1994) のモデルを負債の評価に適用することが可能である。

4. 負債が存在するときの最適定率型ペイアウトポリシー

4.1 負債がないときの最適定率型ペイアウトポリシー — ベンチマークケース —

まずはじめに負債が存在しない場合における株主価値を最大化する定率型ペイアウトポリシーを求めよう。負債が存在しないので、株主価値の最大化は事業資産の価値の最大化を意味し、また経済厚生の意味での社会的な目標を追求することとなる。まず前節の結果を利用して次の補題を得ることができる。

補題 2 $\mu \leq r+\lambda\sigma$ が成立するとき、事業資産の価値のペイアウト率 $\bar{\theta}$ に関する 1 階の偏微係数は次の性質を持つ。

$$\frac{\partial V_t}{\partial \bar{\theta}} \begin{cases} > 0 & \text{if } \mu < r+\lambda\sigma, \bar{\theta} \in [0, 1] \\ = 0 & \text{if } \mu = r+\lambda\sigma, \bar{\theta} \in [0, 1] \end{cases}$$

(証明) $\mu < r+\lambda\sigma$ が成立するときには任意の $\bar{\theta} \in [0, 1]$ において $\mu(1-\bar{\theta}) < r+\lambda\sigma$ が成立するので、(14) 式を $\bar{\theta}$ に関して微分すると、

$$\frac{\partial V_t}{\partial \bar{\theta}} = CF_t \frac{r+\lambda\sigma-\mu}{(r+\lambda\sigma-\mu(1-\bar{\theta}))^2}$$

となるので補題の結果が得られる。

$\mu = r+\lambda\sigma$ が成立するときは、 $\bar{\theta} > 0$ である限り $\mu(1-\bar{\theta}) < r+\lambda\sigma$ となり、(14) 式が成立するのでこの式に $\mu = r+\lambda\sigma$ を代入すると $V_t = \frac{CF_t}{r+\lambda\sigma}$ となる。さらに $\bar{\theta} = 0$ の場合には (16) 式に $\mu = r+\lambda\sigma$ および $\bar{\theta} = 0$ を代入すると $V_t = \frac{CF_t}{r+\lambda\sigma}$ を得る。すなわち $\mu = r+\lambda\sigma$ が成立するときには、任意の $\bar{\theta} \in [0, 1]$ において $V_t = \frac{CF_t}{r+\lambda\sigma}$ が成立する。(証明終わり)

等式 $\mu = r + \lambda\sigma$ が成立するときには事業の収益性が同じリスクの金融資産と同じ水準であるため、キャッシュフローを再投資しても配当として処分しても株主資本の価値に変わりはないと考えられる。したがってこのケースでは株主資本の価値は $\bar{\theta}$ の変更に影響を受けない。この意味で $r + \lambda\sigma$ はキャッシュフローの再投資に関する資本コストと考えることができる。

不等式 $\mu < r + \lambda\sigma$ が成立するときには、事業資産の価値を最大にするためには毎期のキャッシュフローをすべて配当として処分することが望ましい。これは総資産営業利益率の平均回帰水準 μ がキャッシュフロー再投資の資本コストより低い場合再投資がかえって V_t を減少させてしまうからである。

一方、 μ と $r + \lambda\sigma$ の大小関係が逆の場合には、 $\mu(1 - \bar{\theta}) > r + \lambda\sigma$ が成立するペイアウトポリシー $\bar{\theta}$ が存在することとなり、補題1での議論より各時点のキャッシュフローを可能な限り再投資することで価値を無限に大きくすることができる。ただし以下では事業資産の価値が無限に大きくなってしまふこの場合を議論の対象から除き、代わりに μ の値が特定の有限期間の間においてのみ $r + \lambda\sigma$ を超える定率型ペイアウトポリシーについて考察する。

4.2 割引債発行下でのペイアウトポリシー

まず総資産営業利益率の平均回帰水準 μ が一定で不等式 $\mu \leq r + \lambda\sigma$ が成立しているケースを考える。Merton (1974) と同じく額面が F の割引債が単独で発行されている場合を考えることとしよう。定率型ペイアウトポリシーの下での株式の価値を $S(V_t)$ として表すと次のとおりとなる。

$$S(V_t) = \int_t^T E_t^*[\bar{\theta}CF_s] e^{-r(s-t)} ds + e^{-r(s-t)} E_t^*[\max(V_T - F, 0)] \quad (18)$$

(18)式の右辺第1項は、

$$\begin{aligned} \int_t^T E_t^*[\bar{\theta}CF_s] e^{-r(s-t)} ds &= \bar{\theta}CF_t \int_t^T e^{-(r+\lambda\sigma-\mu(1-\bar{\theta}))(s-t)} ds \\ &= \bar{\theta}CF_t \left(\frac{1 - e^{-(r+\lambda\sigma-\mu(1-\bar{\theta}))(T-t)}}{r+\lambda\sigma-\mu(1-\bar{\theta})} \right) \\ &= V_t (1 - e^{-(r+\lambda\sigma-\mu(1-\bar{\theta}))(T-t)}) \end{aligned}$$

となるので株主資本の価値は、

$$\begin{aligned} S(V_t) &= V_t (1 - e^{-(r+\lambda\sigma-\mu(1-\bar{\theta}))(T-t)}) \\ &\quad + e^{-r(s-t)} E_t^*[\max(V_T - F, 0)] \\ V_t &= \frac{\bar{\theta}CF_t}{r+\lambda\sigma-\mu(1-\bar{\theta})} \end{aligned} \quad (19)$$

と表すことができる。また V_T の時点 t における現在価値を V_t^T と表すことにしよう。すなわち $V_t^T = e^{-r(T-t)} E_t^*[V_T]$ である。 V_T は V_t の確率微分方程式から

$$V_T = V_t \exp\left(\left(\mu(1-\bar{\theta}) - \lambda\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(Z_T^* - Z_t^*)\right) \quad (20)$$

と表せるので $E_t^*[V_T] = V_t e^{(\mu(1-\bar{\theta}) - \lambda\sigma)(T-t)}$ が成立する。この表現の下では(19)式右辺第2項のコールオプションの部分はブラックショールズの公式を利用して次のように表現することができる³。

$$S(V_t) = V_t \left(1 - e^{-(r + \lambda\sigma - \mu(1-\bar{\theta}))(T-t)}\right) + c(V_t^T)$$

$$V_t^T = V_t e^{-(r + \lambda\sigma - \mu(1-\bar{\theta}))(T-t)}$$

ただし $c(\cdot)$ は満期が T ，行使価格が F ，原資産のボラティリティが σ ，リスクフリーレートが r のブラックショールズオプション価格公式を原資産価値の関数として表したものである。以上の表現の下で次の命題を証明することができる。

命題4 $\mu \leq r + \lambda\sigma$ が成立している場合，株主資本の価値を最大とする定率型ペイアウトポリシーの下では， $\bar{\theta} = 1$ である。

この結果は直感的には次のように理解することができる。負債が存在しないときに株主資本価値が $\bar{\theta}$ から独立となる $\mu = r + \lambda\sigma$ の場合を考えてみよう。ペイアウトポリシー $\bar{\theta}$ を1単位減少させて内部留保を増加させると債券満期までに株主に支払われる配当の現在価値は $V_t \mu (T-t) e^{-\mu \bar{\theta} (T-t)}$ だけ減少する。一方で V_t^T は同じ額だけキャピタルゲインとして増加するが，それは株主のみならず債権者にも分配されてしまう。すなわち配当が落ちた後の T 時点の株主価値の増加分は時点 t で評価すると上記の配当の現在価値の減少分 $V_t \mu (T-t) e^{-\mu \bar{\theta} (T-t)}$ に“オプションデルタ”を乗じた値だけしか増加しない。オプションデルタは1より小さいため，配当の現在価値の減少分と T 時点での株主資本価値の現在価値増加分の合計はマイナスになってしまうのである。

このように内部留保を増やすことは事業資産価値の成長を高めるが，そのメリットは債権者と株主双方に分配されるため， $\mu = r + \lambda\sigma$ が成立する場合，負債がなければペイアウトポリシーは株主価値と独立であるのに対し，負債が存在する場合株主には内部留保を極力避けるインセンティブが働く。どんなにキャッシュフロー水準が高くても事業の経営状態がよくても総資産営業利益率の平均回帰水準が高々同一リスクの金融資産と同じである限りキャッシュフローを留保しようとしないのである。

最適ペイアウトポリシーを反映させた債券価値は次のようになる。

$$D(V_t) = e^{-r(T-t)} E_t^*[\min[V_T, F]]$$

$$dV_t = (r - \mu)V_t dt + \sigma V_t dZ_t^*$$

Merton (1974) より期待成長率が μ だけ低いいため，満期において債務不履行が発生する確率

³ V_t^T は V_t から(19)式の値を除くことで求めることができる。

は相対的に高くなる。

4.3 一定期間に高い内部成長の機会が存在する場合のペイアウトポリシー

今までは総資産事業利益率の平均回帰水準 μ を一定として分析を進めてきた。だがそこでの結論は負債が存在する限り、キャッシュフローを可能な限り配当として処分することを株主は望む、というものであった。だが成長が著しい実際の企業の例を見る限り、そのようなペイアウトポリシーは必ずしも実行されていない。やはり高い成長機会が存在するならばキャッシュフローを内部にとどめる方が株主の利益にかなうという考え方が一般的であるからである。そこでこの節では一定期間総資産営業利益率の平均回帰水準が資本コストに相当する $r + \lambda\sigma$ を上回っている場合を考えてみる。すなわち平均回帰水準のプロセス $\{\mu_t; t \geq 0\}$ が次の決定論的プロセスに従うとする。

$$\mu_t = \begin{cases} \mu^* & t < T^* \\ r + \lambda\sigma & t \geq T^* \end{cases}$$

ただし μ^* は $r + \lambda\sigma$ より大きな定数である。ここでは話を簡単にするために $T^* > T$ であるとする。つまり総資産事業利益率の平均回帰水準が資本コストである $r + \lambda\sigma$ の水準に下がるのは債券の満期より後の時点であるとしよう⁴。仮にこの企業が自己資本比率100%であった場合には、補題1と同様の議論により $t \leq T^*$ の期間においてはキャッシュフローは全額留保することが事業資産価値を最大化し、社会的に望ましい。もちろん T^* 以降の時点においてはペイアウト率から事業資産の価値は独立となる。

満期が時点 T の割引債が発行されている場合も時点 T^* においてはすでに債券の満期が過ぎているので自己資本比率が100%となっており、前節の議論とまったく同じくペイアウトポリシーから株主資本の価値は独立となる。また時点 T においてもその後は自己資本比率は100%となるので、やはり補題1と同様の議論により、キャッシュフローは配当として処分せずに全額留保することが望ましい。そこで債券満期までのペイアウトポリシーを今までと同じ記号 $\bar{\theta}$ によって表すことにしよう。このとき時点 t における事業資産の価値は次の等式によって表される。

$$\begin{aligned} V_t &= \int_t^T \bar{\theta} E_t^* [CF_u] e^{-r(u-t)} du + E_t^* [V_T] e^{-r(T-t)} \\ &= \bar{\theta} CF_t \frac{1 - e^{-(r + \lambda\sigma - \mu^*(1-\bar{\theta}))(T-t)}}{r + \lambda\sigma - \mu^*(1-\bar{\theta})} + V_t^T \end{aligned}$$

ただし V_t^T は前の節で定義した時点 t から T までの配当の現在価値を除いた事業資産価値の時点 t における現在価値であり、次の式によって表される。

$$V_t^T = \frac{CF_t e^{(\mu^* - (r + \lambda\sigma))(T^* - T)}}{r + \lambda\sigma} e^{-(r + \lambda\sigma - \mu^*(1-\bar{\theta}))(T-t)}$$

μ が一定の場合とは右辺の分数に指数関数 $e^{(\mu^* - (r + \lambda\sigma))(T^* - T)}$ がつく点で異なる。これは債券満期から時点 T^* までの間においてキャッシュフローが再投資され事業資産が高い成長率で成長

⁴ $T^* < T$ としてもこの節の結果は本質的には変わらない。

することが価値に織り込まれているからである。

満期が時点 T の割引債が発行されているときは株主資本の価値は前節と同様に次の形式によって表される。

$$S(V_t) = \bar{\theta} CF_t \frac{1 - e^{-(r + \lambda\sigma - \mu^*(1 - \bar{\theta}))(T-t)}}{r + \lambda\sigma - \mu^*(1 - \bar{\theta})} + c(V_t^T) \quad (21)$$

債券が存在しないときには、時点 T^* までの間キャッシュフローはすべて留保され再投資されることが事業資産の価値を最大化し、社会的にも望ましい。債券が発行されているとき果たしてキャッシュフローはすべて留保されるだろうか。大域的な最適性は後ほど数値計算によって明らかにするとして、ここではまずペイアウト 0 の状態からわずかにペイアウトを増加させるインセンティブがあるかどうか局所的な性質について調べてみよう。(21)式の右辺第1項、すなわち債券満期までの配当の現在価値を $\bar{\theta}$ に関して微分しそれを $\bar{\theta} = 0$ で評価したのが次の式である。

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \bar{\theta} CF_t \frac{1 - e^{-(r + \lambda\sigma - \mu^*(1 - \bar{\theta}))(T-t)}}{r + \lambda\sigma - \mu^*(1 - \bar{\theta})} \right|_{\bar{\theta}=0} \\ &= CF_t \frac{1 - e^{-(r + \lambda\sigma - \mu^*)(T-t)}}{r + \lambda\sigma - \mu^*} \end{aligned}$$

一方 $c(V_t^T)$ の $\bar{\theta}$ に関する偏微係数の $\bar{\theta} = 0$ における値は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} c(V_t^T) &= \left(\frac{\partial c(V_t^T)}{\partial V_t^T} \frac{\partial V_t^T}{\partial \bar{\theta}} \right) \\ &= -\mu^*(T-t) \left. \frac{\partial c(V_t^T)}{\partial V_t^T} \right|_{\bar{\theta}=0} \frac{CF_t e^{(\mu^* - (r + \lambda\sigma))(T^* - t)}}{r + \lambda\sigma} \end{aligned}$$

となる。よって次の不等式が満たされているとき、債券満期までの間にペイアウト比率を 0 から正の水準に増やすインセンティブがある。

$$\frac{1 - e^{-(r + \lambda\sigma - \mu^*)(T-t)}}{r + \lambda\sigma - \mu^*} > \mu^*(T-t) \left. \frac{\partial c(V_t^T)}{\partial V_t^T} \right|_{\bar{\theta}=0} \frac{e^{(\mu^* - (r + \lambda\sigma))(T^* - t)}}{r + \lambda\sigma} \quad (22)$$

(22)式内における確率変数は“オプションデルタ” $\left. \frac{\partial c(V_t^T)}{\partial V_t^T} \right|_{\bar{\theta}=0}$ のみである。ところでこの値は現在のキャッシュフローの水準 CF_t が小さければ小さいほど 0 に近づく。よって低いキャッシュフロー水準が実現してしまったときには(22)式が成立しペイアウトを正の水準にしようとするインセンティブが存在することになる。では逆にキャッシュフローの水準が高くオプションのデルタが 1 に近い場合も同じようにペイアウトを増やすインセンティブがあるだろうか。この問いに対する答えが次の命題である。

命題5 次の不等式が成立するとき(22)式は成立しない.

$$\left. \frac{\partial c(V_t^T)}{\partial V_t^T} \right|_{\bar{\theta}=0} > e^{-(\mu^* - (r + \lambda\sigma))(T^* - T)} \left(\frac{r + \lambda\sigma}{\mu^*} \right) \quad (23)$$

(証明) 数学付録を見よ.

不等式右辺の値は1未満の値である⁵. さらに総資産営業利益率の回帰水準 μ^* と資本コスト $r + \lambda\sigma$ の差が十分に大きいならば, あるいは期間 $T^* - T$ が十分に長いならば右辺の値は0に近い値をとる. よってキャッシュフローの水準が高くオプションデルタの値が高いときには, キャッシュフローの一部を配当として処分しようとするインセンティブは発生しない.

特に注意すべきは不等式右辺が $T^* - T$ の形で期間の長さに依存していることである. したがって, 負債の満期を選択するとき, 短い満期の負債が発行されるならば, キャッシュフローを配当として処分するインセンティブが発生する確率は下がる. 満期が短ければ満期以降において事業資産の成長率が高い期間が長くなり, 株主資本のオプション部分の価値を大幅に上昇させる. このため, 事業資産の一部が債権者に分配されることを考慮してもキャッシュフローを今現在配当として受け取るより, 事業に再投資する方が株主にとって合理的となる.

図1
EQUITY VALUE

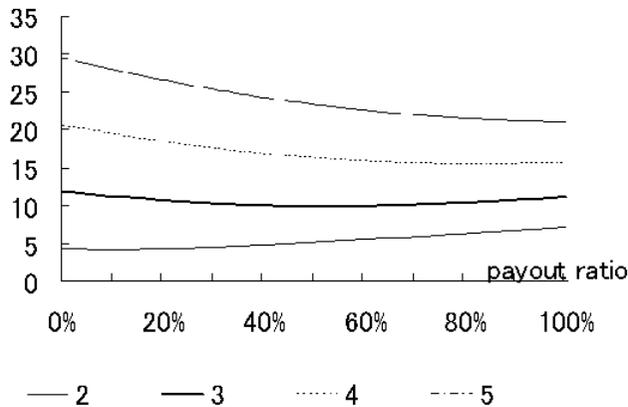


図1はさまざまなキャッシュフロー水準の下での $\bar{\theta}$ と株主資本価値との関係を示したものである. パラメータの値は以下のとおりである: $r = 0.05$, $\lambda = 0.5$, $\sigma = 0.2$, $T = 5$, $F = 20$, $\mu^* = 0.2$, $T^* = 6$. キャッシュフローの水準は1刻みで2から5までの場合を示している. 額面が20

⁵ 前節で分析した $\mu = r + \lambda\sigma$ のケースはこの節のモデルでは $\mu^* = r + \lambda\sigma$ に相当するが, この場合右辺の値が1となり命題における不等式は成立しない.

であり、そのリスクフリーレートによる割引現在価値は約15.57である。したがって $\bar{\theta}$ の水準に依存はするがキャッシュフローの水準が2や3の場合はいわば“インザマネー”，すなわちデフォルトの可能性が高い状態、4、5が“アウトオブザマネー”の状態と考えることができる。

インザマネーのときにはペイアウトが高い方が株主資本価値は高くなる。特にキャッシュフローが2の水準まで下がると株主資本価値は $\bar{\theta}$ の単調増加関数となる。だがアウトオブザマネーであるキャッシュフローが4や5の場合においては逆に株主資本価値は $\bar{\theta}$ の単調減少関数となっており、この状態では事業価値の最大化から逸脱するインセンティブはない。

図2
credit spread

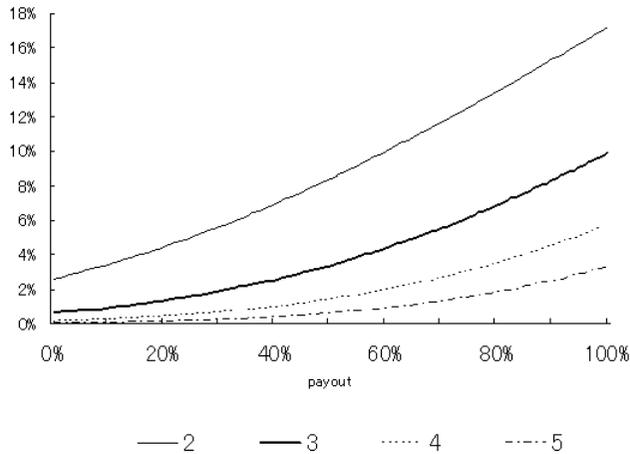


図2は対応するクレジットスプレッドを図に表したものである。特にキャッシュフロー水準が低い場合は $\bar{\theta}$ の水準によって大きくスプレッドが変化する。したがってキャッシュフローの水準が高い水準から低い水準に下がったときにキャッシュフローを再投資せずに配当として処分する方針にペイアウトポリシーが変更された場合、スプレッドはMerton (1974) より大きく変動することになる。

5. おわりに

本論文では、最適ペイアウトポリシーを定率型に絞った上、総資産営業利益率の平均回帰水準が一定でそれが資本コストと一致する場合、下回る場合においていかなるペイアウトポリシーが最適かを分析した。また一定の有限期間において総資産営業利益率の平均回帰水準が資本コストより高い水準となる場合を考え、その場合のペイアウトポリシーと株主資本の価値との関係についても分析し、平均回帰水準が時間を通じて一定の場合と結論が大きく変わることが明らかとなった。

第一に平均回帰水準が一定の場合、株主価値の最大化を追求するならば、キャッシュフローはそのときの水準に関わらず、いつにおいても全額ペイアウトとして処分すべきだという結論と

なる。これに対し平均回帰水準が一定期間中資本コストを上回る場合、キャッシュフローを全額再投資することが事業資産の価値最大化を実現するが、負債が存在するときキャッシュフローをペイアウトとして処分しようとするインセンティブの有無は、キャッシュフローの水準に依存する。すなわちキャッシュフローの水準が低いときには平均回帰水準が一定の場合と同じくキャッシュフローをペイアウトとして処分しようとするインセンティブが発生する。しかしキャッシュフローの水準が高いときはこのインセンティブは発生しない。キャッシュフローはペイアウトとして処分しないと、そのキャッシュフローやそれが再投資によって生み出す将来のキャッシュフローの増分が将来において一部債権者に分配されてしまうが、そのデメリットを埋め合わせる以上の効果が正の純現在価値を生むキャッシュフローの再投資には存在するのである。

第2にキャッシュフロー水準に依存してペイアウト率が変動するペイアウトポリシーは負債の債務不履行の確率を大きく変動させるため、平均回帰水準が一定の場合と比較して負債の利回りに表れる信用スプレッドもキャッシュフローの水準の変化によって大きく変動する。したがって負債価値モデルにペイアウトポリシーの変動を反映させることにより実際に観測される信用スプレッドの変動に対するモデルの説明力を上げることができるかもしれないという理論的含意が得られる。

ただし本論文においては飽くまでも定率型ペイアウトポリシーのみに焦点をあてているため、動的な意味での本来の最適なペイアウトポリシーは求められていない。4節における数値計算においても一度ペイアウト率を選択したらその後ペイアウト率を変更しないことを前提としてペイアウト率と株主価値との関係を求めたに過ぎない。一定期間後にペイアウト率を変更することが許される、あるいは連続的なペイアウト率の変更が許される場合のペイアウトポリシーと株主価値の関係を明らかにしていくことが今後の課題の一つとなるであろう。

6. 数学付録

6.1 補題1の証明

このペイアウトポリシーの下では時点 s 以降では実物資産は成長しないので、 $A_u = A_s, u \geq s$ が成立する。よって時点 s 以後に発生するキャッシュフローは次の式を満たす。

$$\begin{aligned} dCF_u &= \mu dA_u + \sigma CF_u dZ_u \\ &= \sigma CF_u dZ_u, u \geq s \end{aligned}$$

したがってマルチンゲール測度の下ではキャッシュフローは

$$dCF_u = -\lambda \sigma CF_u du + \sigma CF_u dZ_u^*$$

に従い、キャッシュフローの時点 s における条件付期待値は $E_s^*[CF_u] = CF_s e^{-\lambda \sigma (u-s)}$ となる。よって時点 t で評価した条件付期待値は、

$$\begin{aligned} E_t^*[CF_u] &= E_t^*[CF_s] e^{-\lambda \sigma (u-s)} \\ &= CF_t e^{(\mu(1-\bar{\theta}) - \lambda \sigma)(s-t)} e^{-\lambda \sigma (u-s)} \end{aligned}$$

となり現在価値は

$$\begin{aligned} e^{-r(u-t)} E_t^*[CF_u] &= e^{-r(u-t)} E_t^*[CF_s] e^{-\lambda\sigma(u-s)} \\ &= e^{-r(u-s)} e^{-r(s-t)} CF_t e^{(\mu(1-\bar{\theta})-\lambda\sigma)(s-t)} e^{-\lambda\sigma(u-s)} \\ &= CF_t e^{-(r+\lambda\sigma-\mu(1-\bar{\theta}))(s-t)} e^{-(r+\lambda\sigma)(u-s)} \end{aligned}$$

となる。時点 s 以降の時点に関して合計すると、次のとおりとなる。

$$\begin{aligned} &\int_s^\infty e^{-r(u-t)} E_t^*[CF_u] du \\ &= CF_t e^{-(r+\lambda\sigma-\mu(1-\bar{\theta}))(s-t)} \int_s^\infty e^{-(r+\lambda\sigma)(u-s)} du \\ &= CF_t e^{-(r+\lambda\sigma-\mu(1-\bar{\theta}))(s-t)} \frac{1}{r+\lambda\sigma} \end{aligned}$$

さらに時点 t から時点 s までのペイアウト額の現在価値合計は(13)式により

$$\begin{aligned} \int_t^s e^{-r(u-t)} E_t^*[\delta_u] du &= \int_t^s e^{-r(u-t)} \bar{\theta} CF_t e^{(\mu(1-\bar{\theta})-\lambda\sigma)(u-t)} du \\ &= \bar{\theta} CF_t \frac{1 - e^{-(r+\lambda\sigma-\mu(1-\bar{\theta}))(s-t)}}{r+\lambda\sigma-\mu(1-\bar{\theta})} \end{aligned}$$

となるので時点 t 以降の全てのペイアウトの現在価値の合計額は、

$$CF_t e^{-(r+\lambda\sigma-\mu(1-\bar{\theta}))(s-t)} \frac{1}{r+\lambda\sigma} + \bar{\theta} CF_t \frac{1 - e^{-(r+\lambda\sigma-\mu(1-\bar{\theta}))(s-t)}}{r+\lambda\sigma-\mu(1-\bar{\theta})}$$

となる。(証明終わり)

6.2 命題4の証明

(20)式を利用することにより不等式、

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_T}{\partial \theta} &= \frac{\partial V_t}{\partial \theta} e^{(\mu(1-\bar{\theta})-\lambda\sigma)(T-t)} - \mu(T-t) V_T \\ &\geq -\mu(T-t) V_T \end{aligned}$$

が得られる。ただし最後の不等式は補題2の結果、 $\frac{\partial V_t}{\partial \theta} \geq 0$ による。よって

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \max(V_T - F, 0) \begin{cases} \geq -\mu(T-t) V_T & \text{if } V_T \geq F \\ = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成立するので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} E_t^*[\max(V_T - F, 0)] &= E_t^* \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \max(V_T - F, 0) \right] \\ &\geq E_t^*[-\mu(T-t) V_T I_{\{\omega: V_T(\omega) \geq F\}}] \\ &> E_t^*[-\mu(T-t) V_T] \\ &= -\mu(T-t) E_t^*[V_T] \\ &= -\mu(T-t) e^{(\mu(1-\bar{\theta})-\lambda\sigma)(T-t)} V_t \end{aligned}$$

を得る. ただし I は特定の集合によって定義されるインジケータ関数である. 以上より,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} S(V_t) &= \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} V_t (1 - e^{-(r+\lambda\sigma-\mu(1-\bar{\theta}))(T-t)}) \\
 &\quad + e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} E_t^* [\max(V_T - F, 0)] \\
 &= \frac{\partial V_t}{\partial \bar{\theta}} (1 - e^{-(r+\lambda\sigma-\mu(1-\bar{\theta}))(T-t)}) \\
 &\quad + \mu(T-t) e^{-(r+\lambda\sigma-\mu(1-\bar{\theta}))(T-t)} V_t \\
 &\quad + e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} E_t^* [\max(V_T - F, 0)] \\
 &\geq \mu(T-t) e^{-(r+\lambda\sigma-\mu(1-\bar{\theta}))(T-t)} V_t \\
 &\quad + e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} E_t^* [\max(V_T - F, 0)] \\
 &> \mu(T-t) e^{-(r+\lambda\sigma-\mu(1-\bar{\theta}))(T-t)} V_t \\
 &\quad - \mu(T-t) e^{-r(T-t)} e^{(\mu(1-\bar{\theta})-\lambda\sigma)(T-t)} V_t \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となる. ただし最後から2番目の不等式は再び $\frac{\partial V_t}{\partial \bar{\theta}} \geq 0$ により, 最後の不等式は(24)式による.(証明終わり)

6.3 命題5の証明

(22)式の左辺から右辺を引いて表現を変えると次のようになる.

$$\begin{aligned}
 &\frac{1 - e^{-(r+\lambda\sigma-\mu^*)(T-t)}}{r+\lambda\sigma-\mu^*} - \mu^*(T-t) \frac{\partial c(V_t^T)}{\partial V_t^T} \Bigg|_{\bar{\theta}=0} \frac{e^{(\mu^*-(r+\lambda\sigma))(T-t)}}{r+\lambda\sigma} \\
 &= -\frac{1}{\mu^*-(r+\lambda\sigma)} \\
 &\quad \times \left(1 - [1 - \{\mu^*-(r+\lambda\sigma)\}](T-t) G(V_t^T)\right) e^{(\mu^*-(r+\lambda\sigma))(T-t)} \tag{24}
 \end{aligned}$$

ただし関数 $G(V_t^T)$ は次の式で定義される.

$$G(V_t^T) = \frac{\mu^*}{r+\lambda\sigma} e^{(\mu^*-(r+\lambda\sigma))(T-t)} \frac{\partial c(V_t^T)}{\partial V_t^T} \Bigg|_{\bar{\theta}=0}$$

ところが(23)式が成立するときには $G(V_t^T) > 1$ が成立するので, この大小関係を(24)式に代入すると,

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{\partial c(V_t^T)}{\partial V_t^T} \right|_{\bar{\theta}=0} - e^{-(\mu^* - (r + \lambda\sigma))(T-t)} \left(\frac{r + \lambda\sigma}{\mu^*} \right) \\
 & < - \frac{1}{\mu^* - (r + \lambda\sigma)} \\
 & \quad \times \left(1 - \left[1 - \{\mu^* - (r + \lambda\sigma)\} (T-t) \right] e^{(\mu^* - (r + \lambda\sigma))(T-t)} \right) \\
 & \leq \frac{1}{\mu^* - (r + \lambda\sigma)} \\
 & \quad \times \left(1 - e^{-\{\mu^* - (r + \lambda\sigma)\} (T-t)} e^{(\mu^* - (r + \lambda\sigma))(T-t)} \right) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

を得る。(証明終わり)

参 考 文 献

- Gordon, M. J., 1959, Dividends, Earnings and Stock Prices, *Review of Economics and Statistics*, 41, 99-105.
 Leland, H. E., 1994, Optimal Capital Structure, Endogeneous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads, *Journal of Finance*, 49, 1213-1252.
 Merton, R., 1974, On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates, *Journal of Finance* 29, 449-470.

[もりた ひろし 横浜国立大学経営学部教授]

[2008年12月8日受理]