論　　説

非協力探知型情報構造によるN人囚人のジレンマの解消：線形利得関数のもとでのナッシュ均衡の2極性

西　原　　宏[1]

論文要旨

N人囚人のジレンマを展開形ゲームに変更し，手番の順序がランダムに決められ，プレイヤーは互いの非協力行動を観察できるとする．利得関数が一定の条件を満たせば，このゲームにはプレイヤー全員が協力するナッシュ均衡が存在する．しかしながら，同時に，一部のプレイヤーが協力し他のプレイヤーは非協力を選ぶようなナッシュ均衡も多数存在し得る．本論文では，この多数均衡の問題をプレイヤー全員が共通の平行型線形利得関数をもつ状況において検討し，全員が協力する均衡と全員が協力しない均衡の2種類以外に均衡は存在しないという2極性が成り立つことを示す．

1．序

我々の社会では，ある行動が社会にとって望ましいにもかかわらず，それが社会の成員によって採られないということがしばしば起こる．しかも，これは社会の成員が社会にとって望ましいことは何かを理解しているにもかかわらず起こることが多い．牧草地や森林の沙漠化，自然資源の濫費，環境汚染，公共財のフリーライダー問題などがその例である．これらの状況は社会的ジレンマと呼ばれる[2]．

社会的ジレンマに分類される問題は多岐にわたるが，それらに共通する構造は，しばしば，N人囚人のジレンマと呼ばれる標準形ゲームで表される．N人囚人のジレンマでは，プレイヤーは協力と非協力の2つの選択肢をもつ．このゲームでは他のプレイヤーたちが協力，非協力のどちらをとっていても，非協力をとることが個々のプレイヤーにとって合理的選択である．それゆえすべてのプレイヤーが非協力をとる．しかし全員が非協力をとると，その結果は全員にとって最悪に近い事態となる．上記の沙漠化等の問題は，N人囚人のジレンマの構造をもつ

---

[1] 横浜国立大学経営学部在学中，臼井先生にはゼミナールと講義でご指導を賜りました．当時教えていただいたオペレーションズリサーチ，統計学，意思決定理論，ゲーム理論などが，その後の大学院における勉強と研究の基礎となりました．筑波大学博士課程へ進学後も折にふれ激励をいただきました．臼井先生の横浜国立大学経営学部退職に際し感謝の意を表します．

[2] Dawes（1980），山岸（1990）などを見よ．

ために社会にとって望ましくない状況が生じていると考えられる．

社会的ジレンマの解決の手がかり求めて，これまでN人囚人のジレンマにゲームの繰り返し，交渉過程，監視と処罰のしくみなどを追加してゲームの構造を変え，プレイヤーの合理的な選択として協力が実現可能であるかどうかが検討されてきた[3]．

Nishihara（1997）は，プレイヤーの手番の順序がランダムに決定され，プレイヤーが互いの非協力の選択を観察できるという情報構造（非協力探知型情報構造）をもつゲームを検討し，利得関数が一定の条件を満たせば，全員による協力を実現するナッシュ均衡が存在することを示した．このナッシュ均衡は，各プレイヤーが自分より前に誰かが「非協力」をとるときにはそれに「非協力」で応じ，それ以外の場合は「協力」をとるという戦略の組である．さらに，このナッシュ均衡について，Nishihara（1999）はプレイヤーの行動選択のミスや提携による逸脱に対する安定性を示した．

非協力探知型情報構造をもつN人囚人のジレンマについてのこれまでの分析では，全員による協力が実現するナッシュ均衡のみに焦点が当てられてきた．しかしながら，このゲームには，他にもさまざまなナッシュ均衡が存在し得る．そのような多数の均衡の中で全員の協力を実現するナッシュ均衡が存在したとしても，実際にその均衡が実現する可能性は少ない．均衡が多数存在することは，社会的ジレンマの解決において深刻な問題となる．

本論文では，このような多数均衡の問題をすべてのプレイヤーが同一の平行型線形利得関数を持つという仮定のもとで検討する．この仮定は，プレイヤーが共通にある種の単純な選好を持つ状況を表している．論文の目的は，この仮定のもとで非協力探知型情報構造をもつN人囚人のジレンマのナッシュ均衡の集合がどのように狭められるかを明らかにすることである．

分析の結果，ナッシュ均衡は2極性をもつことが示される：全員が協力を採る均衡と全員が非協力を採る均衡の2種類しかない．この結果は，全員が協力を行うナッシュ均衡の存在を際立たせるものである．これによって，社会的ジレンマを解決するための方策として，非協力探知型情報構造は，特に社会の成員が共通にある種の単純な選考を持つ場合に有効であることが示される．

次節では，N人囚人のジレンマとそれに非協力探知型情報構造の付け加えられたモデルを示す．第3節では，ナッシュ均衡の2極性の定理を証明する．最終の第4節を本稿のむすびにあてる．

2．N人囚人のジレンマと非協力探知型情報構造

N人囚人のジレンマは，標準形ゲーム $<I,\{C,D\},\{f_i\}_{i\in I}>$ によって与えられる．ここで，$I=\{1,2,\ldots,N\}(N\geq 2)$ はプレイヤーの集合，C（協力）と D（非協力）は各プレイヤーの選択できる行動，$f_i:\{C,D\}\times\{0,1,\ldots,N-1\}\to R$ はプレイヤーiの利得関数である．利得関数 $f_i(a,k)$ の値は，プレイヤーiが $a\in\{C,D\}$ をとり，彼以外のk人のプレイヤーが C をとるときの彼のフォンノイマン・モルゲンシュテルン効用関数の値を表す．各 $i\in I$ について，次の3つの仮定が置かれる．

（A.1）$k=0,1,\ldots,N-1$ について $f_i(C,k)<f_i(D,k)$,

[3] Fudenberg and Maskin（1986），Kalai（1981），Okada（1993）など．

（A.2）$f_i(C, N-1) > f_i(D, 0)$,

（A.3）$f_i(C,k)$ と $f_i(D,k)$ は，kについて厳密な増加関数.

これらの仮定の意味は以下の通りである．（A.1）は，他のプレイヤーがどのような選択を行っているとしても，C をとるよりも D をとる方が高い利得が得られることを意味する．（A.2）は，全員が D をとる状況よりも全員が C をとる状況の方が望ましいことを言っている．（A.3）は，C，D どちらの行動をとる場合でも, 他のプレイヤーの中で C をとる者が多いほど利得は高くなることを言っている．（A.1）により行動 D が支配戦略となる．しかし,（A.2）により，全員で C をとる状況の方が全員で D をとる状況よりも望ましい．このジレンマのためにこのゲームはN人囚人のジレンマと呼ばれる．なお，プレイヤーの人数が２人のとき，N人囚人のジレンマは良く知られた囚人のジレンマとなる．

N人囚人のジレンマを次のような展開形ゲームに変形する．

（ⅰ）始めに自然が $1, 2 \ldots, N$ の順列の全体から１つを一様分布に従って選び出す．１つの順列は，プレイヤーの手番の順序を表す[4]．

（ⅱ）次に各プレイヤーは，自然によって選び出された手番の順序に従って行動 C または D を選択する.

（ⅲ）各プレイヤーは，手番において自分の前に誰かが D を採ったならばそれが判るが，自分の前に何人が D を採ったか，何人が C を採ったか，自分が何番目の手番かは分からないという情報構造をもつ.（これを非協力探知型情報構造と呼ぶ）

（ⅳ）すべてのプレイヤーが行動を選んだ後，各プレイヤーiは選ばれた行動に従って利得 $f_i(a,k)$ を獲得する.

X_i をプレイヤーiの意思決定ノードの集合とする．Y_i をプレイヤーiの意思決定ノードの中で（１）彼が最初の手番を持つもの，あるいは,（2）彼よりも前のプレイヤーがすべて C をとった後に到達するものの集合とする．$P_i^* = \{Y_i, X_i \setminus Y_i\}$ とし，情報分割 $P^* = (P_1^*, \ldots, P_N^*)$ によって（ⅲ）の情報構造を表す．上記の（ⅰ）から（ⅳ）の構造をもつ展開形ゲームを $\Gamma(P^*)$ で表し，このゲームを**非協力探知型情報構造を持つN人囚人のジレンマ**と呼ぶ.

各 $i \in I$ について，$s_i : P_i^* \to \{C, D\}$ をプレイヤーiの（純粋）**戦略**と定義する．$\Gamma(P^*)$ における各プレイヤーの戦略を CC，CD，DC，DD で表す．ただし，ここで先に書いてある行動は Y_i でとる行動，後に書いてある行動は $X_i \setminus Y_i$ でとる行動である．$S_i(P)$ で，プレイヤーiの戦略の集合を表す．戦略のN組 $(s_1, \ldots, s_N)$ を**戦略プロファイル**という．

$S(P) \equiv \prod_{i \in I} S_i(P)$ で戦略プロファイルの集合を表す．戦略プロファイルsが与えられたとき，手番の順序の各々において戦略によって採られる行動の列を列挙したものをsの**プレイ**と呼ぶ．ある戦略プロファイルのプレイが $(C, \ldots, C)$ ばかりからなるとき，その戦略プロファイルは**協力を実現する**という．任意の戦略プロファイルsにおいて，$u_i(s)$ はsにおけるプレイヤーiの**期待利得**を表す．戦略プロファイルsが，すべての $i \in I$ と $s'_i \in S_i(P)$ について $u_i(s) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$ を満たすとき，sは**ナッシュ均衡**であると定義する．ここで，s_{-i} はsの中でプレイヤーi以外のプレイヤーの戦略の組を表す．また，戦略 s_i と s'_i において，（１）すべて

[4] 例えば自然が（3,1,2,⋯）を選んだ場合，始めにプレイヤー３が，次にプレイヤー１が，その後プレイヤー２が手番を持つとする．

の $t \in \prod_{j \neq i} S_j$ について $u_i(s_i, t) > u_i(s'_i, t)$ が成り立ち，（２）ある $t \in \prod_{j \neq i} S_j$ において $u_i(s_i, t) > u_i(s'_i, t)$ が成り立つとき，s_i は s'_i を**弱く支配する**という．

Nishihara（1997），（1999）は，以下の４つの結果を得た．

（結果１）すべてのプレイヤーにおいて，CD は CC を弱く支配し，DD は DC を弱く支配する．特に，他に DD または DC を採るプレイヤーがいるとき，CC および DC による利得は，各々 CD および DD による利得より小さくなる．

（結果２）利得関数について，

$$\text{すべての } i \in I \text{ について} \qquad f_i(C, N-1) \geq \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_i(D, k) \qquad \text{(c1)}$$

が成り立つならば，$(CD, \ldots, CD)$ はナッシュ均衡であり協力を実現する．不等式の左辺は $(CD, \ldots, CD)$ におけるプレイヤーiの利得（全員が C を採るときの利得）である．右辺は $(CD, \ldots, CD)$ においてプレイヤーiが C の代わりに D を採るとき，彼の前に手番をもつプレイヤー（彼の手番が１番めであれば０人，２番目であれば１人，. . . ，N番目であれば$N-1$人）のみが C を採ることから期待利得を求めたものである．

（結果３）条件（c1）が成り立つとき，$(CD, \ldots, CD)$ は，提携安定的ナッシュ均衡（coalition-proof Nash equilibrium）である．

（結果４）条件（c1）が厳密な不等式で成り立つとき，$(CD, \ldots, CD)$ は，厳密なプロパー均衡（strictly proper equilibrium）である[5]．

これらの結果は，非協力探知型情報構造によってN人囚人のジレンマが解消されることを示唆している．上の（結果３）と（結果４）は，それぞれ全員での協力が実現するナッシュ均衡が，「行動選択のミス」と「提携による逸脱」に対して安定であることを示している．

４．多数均衡の問題とその解消

上述のように非協力探知型情報構造をもつN人囚人のジレンマは，全員による協力が実現するナッシュ均衡をもち，この均衡は高い安定性を備えている．しかしながら，この結果を社会的ジレンマの解決へつなぐためには，このままでは不十分である．なぜならば，$\Gamma(P^*)$ においては，２人からN人までの各サイズの $2^N - N - 1$ 個のグループにおける協力が，ナッシュ均衡として達成される可能性がある．そのような中では，$(CD, \ldots, CD)$ がたとえナッシュ均衡であったとしても，実際のゲーム的状況においてこの均衡が実現する保証は少ない．つまり，均衡が多数存在することは，社会的ジレンマの解決において重大な障害となる．

多数均衡の問題点についてもう少し詳しく考えてみよう．ナッシュ均衡の解釈としては，一般に（１）完備情報解釈（complete information interpretation）（２）素朴解釈（naive interpretation）がある[6]．完備情報解釈は，これから１つのゲームが１回だけ行われようとしている状況で，ゲームのルールがプレイヤー間で完備情報であればプレイヤーは互いの行動を

---

[5] 本論文では，提携安定的ナッシュ均衡と厳密なプロパー均衡に関する分析は行わないので，これらの定義の記述を省略する．詳しくは，Nishihara（1999），van Damme（1991）などを参照せよ．

[6] 詳しくは，Kaneko（1982）を参照せよ．

読み合うが，その読みの行き着く先のゲームの解としてナッシュ均衡を解釈するというものである．素朴解釈は，あるゲームが何度も繰り返し行われている状況で，プレイヤーが経験から互いの出方を学習し合った結果の定常状態としてナッシュ均衡を解釈するというものである．社会的ジレンマは１回限りではなく何度も繰り返される状況であるので，完備情報解釈の想定する状況ではなく，素朴解釈の想定する状況である．もし，社会的ジレンマが非協力探知型情報構造の導入によって修正され，様々なナッシュ均衡が存在したとすると，その状況の繰り返しの中で，ある１つのナッシュ均衡に収斂するためには，多くの試行錯誤を含む長い調整過程が必要であろう．そのような調整過程を必要とする解決策は現実的でないし，また最終的に収斂するナッシュ均衡が全員での協力の実現するナッシュ均衡となることも保証できない．これが多数均衡の抱える問題点である．

多数均衡の問題が解消する１つの可能性として，利得関数が限定される場合がある．そこでは，利得関数の性質から均衡の集合が狭められるかもしれない．以下では，すべてのプレイヤーが同一の**平行型線形利得関数** $f_i(C,k)=\alpha k$，$f_i(D,k)=\alpha k+\beta$（ただし $\alpha,\beta>0$, $\alpha(N-1)>\beta$）をもつ状況を考えよう[7]．これは，例えば，Schelling（1978），Shapley and Shubik（1969）にも見られる利得関数で，プレイヤーが共通にある種の単純な選好をもつ状況を表す．次の定理は，このような制限のもとでは多数均衡の問題が解消することを示す．

定理． 利得関数が，$f_i(C,k)=\alpha k$，$f_i(D,k)=\alpha k+\beta$（ただし，$\alpha,\beta>0$, $\alpha(N-1)>\beta$）であれば，$\Gamma(P^*)$ には，CD と CC の組み合わせの戦略プロファイルと $(DD,\ldots,DD)$ 以外にナッシュ均衡は存在しない．

証明． 何人かのプレイヤーが CD を採り，残りのプレイヤーが DD をとるナッシュ均衡が存在しないことを示す．上述の（結果１）から，定理の証明のためにはこれを示せば十分である．証明は４部からなる．

第１部． この第１部では証明の全体的な方針を示す．プレイヤーiを任意に固定する．彼以外のプレイヤーの中でL人 $(0\le L\le N-1)$ が CD をとり，$N-L-1$人が DD を採る状況を考える．この状況を**状況L**と呼ぼう．状況Lにおいてプレイヤーiが CD をとるときの彼の期待利得を $E_L(CD)$，DD を採るときの彼の期待利得を $E_L(DD)$ で表す．さらに関数 $\varphi(L)=E_L(CD)-E_L(DD)$ を定義する．すべてのプレイヤーが同じ利得関数をもつことから，$\varphi(L-1)\ge 0$ かつ $\varphi(L)\le 0$ であることが，L人が CD を採り$N-L$人が DD を採る戦略プロファイルがナッシュ均衡であるための必要十分条件となる．

関数 $\varphi(L)$ について，定義から $E_0(CD)=0$，$E_0(DD)=\beta$ であるので，$\varphi(0)<0$ が得られる．以下では $0\le L\le N-1$ の範囲で $\Delta\varphi(L)\equiv\varphi(L)-\varphi(L-1)$ が

（条件１）すべてのLについて $\Delta\varphi(L)\le 0$,

（条件２）すべてのLについて $\Delta\varphi(L)\ge 0$,

（条件３）ある L^* が存在して，$L\le L^*$ となるLにおいて $\Delta\varphi(L)\le 0$，$L\ge L^*$となるLにおいて $\Delta\varphi(L)\ge 0$,

[7] 関数 $f_i(C,k)$ と $f_i(D,k)$ のグラフが平行であることから平行型と呼ぶ．

のいずれかを満たすことを示す．$\varphi(0)< 0$ より，これらのいずれの条件が満たされる場合も $\varphi(L-1)\geq 0$ かつ $\varphi(L)\leq 0$ となるLは存在しない．よって，L人 $(1\leq L\leq N-1)$ のプレイヤーが CD を採り，$N-L$人のプレイヤーが DD を採るナッシュ均衡が存在しないことが示される．

第２部． この第２部では，$\Delta\varphi(L)$ が，上の条件１，２，３のいずれかを満たすためには，ある関数がLについての非減少関数であることを言えばよいことを示す．

プレイヤーi以外のプレイヤーの中で１人を任意に固定し，プレイヤーjと呼ぶ．プレイヤーiとj以外のプレイヤーの中で，ある$L-1$人 $(0\leq L-1\leq N-2)$ のプレイヤーが CD をとり，残りのプレイヤーが DD を採る状況を考える．プレイヤーjが CD をとるならば状況Lとなり，プレイヤーjが DD をとるならば状況$L-1$となることに注意せよ．以下では，プレイヤーの並び方を６つのタイプに分ける．なお，これ以降，CD を採るプレイヤーを CD プレイヤー，DD を採るプレイヤーを DD プレイヤーと呼ぶことにする．

タイプ１：プレイヤーiの方がプレイヤーjより先であり，プレイヤーiの前に少なくとも１人の DD プレイヤーがいる．

タイプ２：プレイヤーiの方がプレイヤーjより先であり，プレイヤーiの前には DD プレイヤーがおらず，プレイヤーiとプレイヤーjの間に少なくとも１人の DD プレイヤーがいる．

タイプ３：プレイヤーiの方がプレイヤーjより先であり，プレイヤーjの前には DD プレイヤーがいない．

タイプ４：プレイヤーjの方がプレイヤーiより先であり，プレイヤーjの前に少なくとも１人の DD プレイヤーがいる．

タイプ５：プレイヤーjの方がプレイヤーiより先であり，プレイヤーjの前には DD プレイヤーがおらず，プレイヤーjとプレイヤーiの間に少なくとも１人の DD プレイヤーがいる．

タイプ６：プレイヤーjの方がプレイヤーiより先であり，プレイヤーiの前に DD プレイヤーがいない．

まず，$\varphi(L)$ を評価する．プレイヤーjが CD をとるとし（状況L），プレイヤーiが CD をとるときの方が DD をとるときよりどれだけの利得の増大になるか上記の６つのタイプについて調べよう．

タイプ１，４，５の並び方においては，プレイヤーiが CD をとるときも DD をとるときも，彼は D をプレイするので，利得の増分は０である．

タイプ２で，プレイヤーiの前にいる CD プレイヤーの数を l_1 人，プレイヤーiと彼の後に最初に来る DD プレイヤーとの間にいる CD プレイヤーの数を l_2 人とする（図１参照）．プレイヤーiが CD をとるときの彼の利得は，$\alpha(l_1+l_2)$ であり，プレイヤーiが DD をとるときの彼の利得は，$\alpha l_1+\beta$ である．よって，利得の増分は $\alpha l_2-\beta$ である．

図１：タイプ２の並び方

$$\underbrace{CD\ldots CD}_{l_1}(i)\underbrace{CD\ldots CD}_{l_2}(DD)\ldots(j)\ldots$$

タイプ３で，プレイヤーiの前の CD プレイヤーの数を m_1 人，プレイヤーiとプレイヤーjの間の CD プレイヤーの数を m_2 人，プレイヤーjと彼の後に最初に来る DD プレイヤーとの間にいる CD プレイヤーの数を m_3 人とする（図２参照）．プレイヤーiが CD をとるときの彼の利得は，$\alpha(m_1+m_2+m_3+1)$ であり，プレイヤーiが DD をとるときの彼の利得は，$\alpha m_1+\beta$ である．（プレイヤーjが CD プレイヤーであることに注意せよ）．よって，利得の増分は $\alpha(m_2+m_3+1)-\beta$ である．

図２：タイプ３の並び方

$$\underbrace{CD\ldots CD}_{m_1}(i)\underbrace{CD\ldots CD}_{m_2}(j)\underbrace{CD\ldots CD}_{m_3}(DD)\ldots$$

タイプ６で，プレイヤーjの前の CD プレイヤーの数を n_1 人，プレイヤーjとプレイヤーiの間の CD プレイヤーの数を n_2 人，プレイヤーiと彼の後に最初に現れる DD プレイヤーとの間にいる CD プレイヤーの数を n_3 人とする（図３参照）．プレイヤーiが CD をとるときの彼の利得は，$\alpha(n_1+n_2+n_3+1)$ であり，プレイヤーiが DD をとるときの彼の利得は，$\alpha(n_1+n_2+1)+\beta$ である．よって，求める利得の増分は $\alpha n_3-\beta$ である．

図３：タイプ６の並び方

$$\underbrace{CD\ldots CD}_{n_1}(j)\underbrace{CD\ldots CD}_{n_2}(i)\underbrace{CD\ldots CD}_{n_3}(DD)\ldots.$$

以上により，

$$\varphi(L)=\frac{1}{N!}\Big[\sum_{t=0}^{L-1}(t-\beta)\ \text{（タイプ２で } l_2=t \text{ となる並び方の数）}$$
$$+\sum_{t_2=0}^{L-1}\sum_{t_3=0}^{L-1-t_2}(t_2+t_3+1-\beta)\ \text{（タイプ３で} m_2=t_2, m_3=t_3 \text{となる並び方の数）}$$
$$+\sum_{t=0}^{L-1}(t-\beta)\ \text{（タイプ６で } n_3=t \text{ となる並び方の数）}\ \Big]$$

が得られる．

次に，$\varphi(L-1)$ を評価する．プレイヤーjが DD をとるとし（状況$L-1$），プレイヤーiが CD をとる方が DD をとるよりもどれだけの利得の増大となるかを再びタイプ１からタイプ６について調べよう．

タイプ１およびタイプ４，５，６の並び方においては，プレイヤーiの前に DD プレイヤーがいるので，プレイヤーiが CD を採ろうとも DD を採ろうとも，彼は D をプレイする．よって，利得の増分は０である．

タイプ２では，プレイヤーjの前に DD プレイヤーがいるので，求める利得の増分はプレイヤーjが CD プレイヤーである場合と同じである．

タイプ３において上と同様に m_1，m_2，m_3 を定義する（図１参照）．プレイヤーiが CD をとるときの利得は $\alpha(m_1+m_2)$ であり，彼が DD をとるときの利得は $\alpha m_1+\beta$ である．よって，利得の増分は $\alpha m_2-\beta$ である．

以上により，

$$\varphi(L-1)=\frac{1}{N!}\Big[\sum_{t=0}^{L-1}(t-\beta)\text{（タイプ 2 で }l_2=t\text{ となる並び方の数）}$$
$$+\sum_{t=0}^{L-1}(t-\beta)\text{（タイプ 3 で }m_2=t\text{ となる並び方の数）}\Big]$$

が得られる．

以上の結果から $\Delta\varphi(L)$ を求めるために若干の計算を行っておく．上の $\varphi(L)$ の評価式の 2 番目の総和は，次のように変形できる．

$$\sum_{t_2=0}^{L-1}\sum_{t_3=0}^{L-1-t_2}(t_2+t_3+1-\beta)\text{（タイプ 3 で }m_2=t_2, m_3=t_3\text{ となる並び方の数）}$$
$$=\sum_{t_2=0}^{L-1}\sum_{t_3=0}^{L-1-t_2}(t_2-\beta)\text{（タイプ 3 で }m_2=t_2, m_3=t_3\text{ となる並び方の数）}$$
$$+\sum_{t_2=0}^{L-1}\sum_{t_3=0}^{L-1-t_2}(t_3+1)\text{（タイプ 3 で }m_2=t_2, m_3=t_3\text{ となる並び方の数）}$$
$$=\sum_{t_2=0}^{L-1}(t_2-\beta)\text{（タイプ 3 で }m_2=t_2\text{ となる並び方の数）}$$
$$+\sum_{t_3=0}^{L-1}(t_3+1)\text{（タイプ 3 で }m_3=t_3\text{ となる並び方の数）}.$$

これを使うことにより上の $\varphi(L)$ と $\varphi(L-1)$ の評価式から

$$\Delta\varphi(L)=\frac{1}{N!}\Big[\sum_{t=0}^{L-1}(t+1)\text{（タイプ 3 で }m_3=t\text{ となる並び方の数）}$$
$$+\sum_{t=0}^{L-1}(t-\beta)\text{（タイプ 6 で }n_3=t\text{ となる並び方の数）}\Big]$$

が得られる．ここで，タイプ 3 とタイプ 6 の並び方の違いは，プレイヤーiとプレイヤーjの順序の違いだけであるから，タイプ3で $m_3=t$ となる並び方の数は，タイプ6で $n_3=t$ となる並び方の数と等しい．よって，

$$N!\Delta\varphi(L)=\sum_{t=0}^{L-1}(t+1)\text{（タイプ 3 で }m_3=t\text{ となる並び方の数）}$$
$$+\sum_{t=0}^{L-1}(t-\beta)\text{（タイプ 3 で }m_3=t\text{ となる並び方の数）}$$
$$=\sum_{t=0}^{L-1}2t\text{（タイプ 3 で }m_3=t\text{ となる並び方の数）}$$
$$+(1-\beta)\sum_{t=0}^{L-1}\text{（タイプ 3 で }m_3=t\text{ となる並び方の数）}$$
$$=\sum_{t=0}^{L-1}2t\text{（タイプ 3 で }m_3=t\text{ となる並び方の数）}$$
$$+(1-\beta)\text{（タイプ 3 となる並び方の数）}$$

$$=(\text{タイプ3となる並び方の数})\left\{2\sum_{t=0}^{L-1} t\frac{(\text{タイプ3で}m_3=t\text{となる並び方の数})}{(\text{タイプ3となる並び方の数})}+(1-\beta)\right\}$$

となる．よって，

$$\sum_{t=0}^{L-1} t\frac{(\text{タイプ3で}m_3=t\text{となる並び方の数})}{(\text{タイプ3となる並び方の数})}$$

がLについて非減少であることを示せば，$\Delta\varphi(L)$ が第1部で述べた条件１，２，３のいずれかを満たすことがいえる．

ここで，$\Delta\varphi(L)$ の評価においてプレイヤーiとj以外のプレイヤーの中で$L-1$人が CD を採るとしていたことを思い出そう．よって，この人数に依存して（タイプ３で $m_3=t$ となる並び方の数）と（タイプ３となる並び方の数）は決定する．このことを明示して

$$\xi(L)=\sum_{t=0}^{L-1} t\frac{(\text{タイプ3で}m_3=t\text{となる並び方の数}:L-1)}{(\text{タイプ3となる並び方の数}:L-1)}$$

と定義する．

第３部． この第３部では，$0\leq L\leq N-2$ の範囲で $\xi(L)$ がLについて増加関数であることを示す．$\xi(L)$ の定義において，プレイヤーiとj以外の CD プレイヤーが$L-1$人であったことを思い出そう．$L\leq N-2$ から $L-1\leq N-3$ であり，少なくとも１人の DD プレイヤーがいることになる．

以下では，$\xi(L)$ がLについて増加関数であることを示すために $\xi(L)$ と $\xi(L-1)$ を比較する．$\xi(L)$ と $\xi(L-1)$ の定義において，プレイヤーiとj以外の CD プレイヤーは，各々$L-1$人，$L-2$人である．そこで，プレイヤーiとj以外から１人を任意に選びプレイヤーkと呼びi，j，k以外で$L-2$人が CD を採るとする．プレイヤーkが CD をとる場合は，プレイヤーiとj以外の CD プレイヤーは$L-1$人であり $\xi(L)$ の評価を行うことができる．プレイヤーkが DD をとる場合は，プレイヤーiとj以外の CD プレイヤーは$L-2$人であり $\xi(L-1)$ の評価を行うことができる．

$\xi(L)$ と $\xi(L-1)$ の評価を行うためにタイプ３に含まれるプレイヤーの並び方を場合分けする．プレイヤーiの方がプレイヤーjより先で，プレイヤーjより前に DD プレイヤーがいない場合のみを考える．これ以外の並び方はタイプ３の並び方にはならない．プレイヤーkの順番によって以下の４つのタイプに分けることができる．

タイプＡ：プレイヤーiよりも前にプレイヤーkがいる．

タイプＢ：プレイヤーiとプレイヤーjの間にプレイヤーkがいる．

タイプＣ：プレイヤーjとその後に初めて来る DD プレイヤーの間にプレイヤーkがいる．

タイプＤ：プレイヤーjの後に初めて来る DD プレイヤーよりも後にプレイヤーkがいる．

タイプＡからタイプＤの各タイプの並び方の総数を N_A，N_B，N_C，N_D で表す．ここで，タイプＡ，Ｂ，Ｃの違いは，プレイヤーi，j，kの並び方の違いでしかないので，$N_A=N_B=N_C$ が成り立つことに注意せよ．

まず，プレイヤーkが CD をとるとして $\xi(L)$ の評価を行おう．

タイプＡにおいて，プレイヤーjとjの後に最初に来る DD との間にいる CD プレイヤーの人数を a で表す（図４参照）．タイプ３において定義された m_3 の値は a となる．タイプＡの中で $a=t(t=0,1,\ldots,L-1)$ の並び方の総数を $n_a(t)$ で表し，さらに $\sum_{t=0}^{L-1} tn_a(t)=\mu_a$ と表す．（プレイヤーi，j，k以外の CD プレイヤーの数は$L-2$人であるから $a \leq L-2$ でなければならない．よって，$n_a(L-1)=0$ であることに注意せよ．）

図４：タイプＡの並び方

$$(k)\ldots(i)\ldots(j)\underbrace{CD\ldots CD}_{a}(DD)\ldots$$

タイプＢにおいて，プレイヤーjと最初の DD プレイヤーとの間の CD プレイヤーの人数をbで表す．第２部において定義された m_3 の値はbとなる．タイプＢの中で $b=t(t=0,1,\ldots,L-1)$ となる並び方の総数を $n_b(t)$ で表す．ここで，任意の $t=0,\ldots,K$について $n_b(t)=n_a(t)$ であることに注意せよ．なぜならば，タイプＢにおける $b=t$ となる並び方について，プレイヤーiとjを入れ替えたものはタイプＡにおける $a=t$ となる並び方となり，またその逆も成り立つからである．よって，$\sum_{t=0}^{L-1} tn_b(t)=\mu_a$ となる．

図５：タイプＢの並び方

$$(i)\ldots(k)\ldots(j)\underbrace{CD\ldots CD}_{b}(DD)\ldots$$

タイプＣにおいて，プレイヤーjとプレイヤーkの間の CD プレイヤーの人数を c_1，プレイヤーkとkの後に最初に来る DD プレイヤーとの間にいる CD プレイヤーの人数を c_2 とする（図６参照）．第２部において定義された m_3 の値は c_1+c_2+1 となる．タイプＣの中で $c_1=t_1,\ c_2=t_2\,(t_1,t_2=0,1,\ldots,L-1)$ となる並び方の数を $n_{c_1c_2}(t_1,t_2)$ で表す．（$0 \leq t_1+t_2 \leq L-2$ でなければならないから，いくつかの (t_1,t_2) において $n_{c_1c_2}(t_1,t_2)=0$ となる）また，$c_1=t$ となる並び方の総数を $n_{c_1}(t)$，$c_2=t$ となる並び方の総数を $n_{c_2}(t)$ で表す．このとき，以下の（ｉ）から（iv）が成り立つ．

（ｉ）$\sum_{t_2=0}^{L-1} n_{c_1c_2}(t_1,t_2)=n_{c_1}(t_1)$，$\sum_{t_1=0}^{L-1} n_{c_1c_2}(t_1,t_2)=n_{c_2}(t_2)$ である．

（ii）任意の $t=0,\ldots,L-1$ について $n_{c_2}(t)=n_a(t)$ である．なぜならば，タイプＣで $c_2=t$ となる任意の並び方に対して，プレイヤーi，j，kの呼び名をそれぞれk，i，jに入れ替えたものは，タイプＡの $a=t$ の並び方となり，またその逆も成り立つからである．よって，$\sum_{t=0}^{L-1} tn_{c_2}(t)=\mu_a$ となる．

（iii）$n_{c_1}(t)=n_{c_2}(t)$ である．これは次のような理由による．プレイヤーk以外のプレイヤーについて，タイプＣとなりうるような１つの並び方を考える．いま，プレイヤーkがある場所に入ったとき $c_1=t$ であるとすると，同じtに対し $c_2=t$ となるようなプレイヤーkの場所が１つ存在する．よって，タイプＣにおいて，$c_1=t$ となるような並び方の数 $n_{c_2}(t)$ と $c_2=t$ となるような並び方の数 $n_{c_2}(t)$ は等しくなくてはならない．

（iv）上の（ｉ）から（iii）より，

$$\sum_{t=0}^{L-1} tn_{c_1}(t) = \sum_{t=0}^{L-1} tn_{c_2}(t) = \mu_a,$$
$$\sum_{t_1=0}^{L-1}\sum_{t_2=0}^{L-1-t_1}(t_1+t_2)\, n_{c_1c_2}(t_1,t_2) = 2\mu_a$$
となる．

図６：タイプＣの並び方

$$CD\ldots CD\,(i)\,CD\ldots CD\,(j)\,\underbrace{CD\ldots CD}_{c_1}\,(k)\,\underbrace{CD\ldots CD}_{c_2}\,(DD)\ldots$$

タイプＤにおいて，プレイヤーjとjの後に最初に来る DD プレイヤーとの間にいる CD プレイヤーの人数をdで表す（図７参照）．第２部において定義された m_3 の値はdとなる．タイプ D の中で $d=t\,(t=0,1,\ldots,L-1)$ の並び方の総数を $n_d(t)$ で表す．（プレイヤーi，j，k以外の CD プレイヤーの数は$L-2$ 人であるから $d \le L-2$ でなければならない．よって，$n_d(L-1)=0$ である）ここで，$t=0,1,\ldots,L-1$ について，$n_{c_1}(t)=(N-L-1)\,n_d(t)$ となることに注意せよ．これは，タイプ C で $c_1=t$ となる並び方の１つにおいて，プレイヤーkを任意の DD に入れ替えたものがタイプＤの $d=t$ の１つの並び方となるからである（プレイヤーi，j，k以外の DD プレイヤーの人数は $(N-3)-(L-2)=N-L-1$人）．よって，

$$N_D=(N-L-1)\,N_C,$$
$$\sum_{t=0}^{L-1} tn_d(t) = (N-L-1)\,\mu_{c_1}$$

が成り立つ．

図７：タイプＤの並び方

$$CD\ldots CD\,(i)\,CD\ldots CD\,(j)\,\underbrace{CD\ldots CD}_{d}\,(DD)\ldots(k)\ldots$$

以上の結果から

$$\xi(L)=\frac{\sum_{t=0}^{L-1} t\left(n_a(t)+n_b(t)+\sum_{t_2,t_3:\,t_2+t_3+1=t} n_{c_1,c_2}(t_1,t_2)+n_b(t)\right)}{N_A+N_B+N_C+N_D}$$

において，

$$\begin{aligned}
\text{分子}=&\sum_{t=0}^{L-1} tn_a(t)+\sum_{t=0}^{L-1} tn_a(t)+\sum_{t_1=0}^{L-1}\sum_{t_2=0}^{L-1-t_1}(t_1+t_2+1)\,n_{c_1c_2}(t_1,t_2)+\sum_{t=0}^{L-1} tn_d(t)\\
&\ge \sum_{t=0}^{L-1} tn_a(t)+\sum_{t=0}^{L-1} tn_b(t)+\sum_{t_1=0}^{L-1}\sum_{t_2=0}^{L-1-t_1}(t_1+t_2)\,n_{c_1c_2}(t_1,t_2)+\sum_{t=0}^{L-1} tn_d(t)\\
&=4\mu_a+(N-L-2)\,\mu_a\\
&=(N-L+3)\,\mu_a,
\end{aligned}$$

$$\text{分母}=3N_A+(N-L-1)\,N_A=(N-L+2)\,N_A$$

が得られる．よって，

$$\xi(L)\ge\frac{(N-L+3)\,\mu_a}{(N-L+2)\,N_A}$$

が得られる．

次に，プレイヤーkが DD を採るとして $\xi(L-1)$ の評価を行おう．この場合は，タイプ３となるのは，上記のタイプ C と D のみとなる．

タイプＣにおいて，プレイヤーkが DD プレイヤーの場合，第２部において定義された $m_3 = c_1$ であることに注意せよ．上の分析で，

$$\sum_{t=0}^{L-1} t n_{c_1}(t) = \sum_{t=0}^{L-2} t n_{c_1}(t) = \mu_a,$$

が示された．

タイプＤにおいては，プレイヤーkが CD プレイヤーであるか DD プレイヤーであるかに関係なく，第２部において定義された $m_3 = d$ となる．上の分析で $t = 0, 1, \ldots, L-1,$ について

$$n_d(t) = (N-L-1)\, n_a(t)$$

が示された．

以上により，

$$\xi(L-1) = \frac{\sum_{t=0}^{L-2} t\,\{n_{c_1}(t) + n_d(t)\}}{N_C + N_D} = \frac{\mu_a + (N-L-1)\mu_a}{N_A + (N-L-1) N_A} = \frac{\mu_a}{N_A}$$

となる．よって，

$$\xi(L) \geq \frac{(N-L+3)\mu_a}{(N-L+2) N_A} > \frac{\mu_a}{N_A} = \xi(L-1)$$

を得る．即ち，$0 \leq L \leq N-2$ の範囲において，$\xi(L)$ はLについての増加関数である．

第４部． この第４部では，$\xi(N-1) > \xi(N-2)$ であることを示す．証明の方針は，第3部と同様である．$\xi(N-1)$ と $\xi(N-2)$ の定義において，プレイヤーiとj以外の CD プレイヤーは，各々$N-2$人，$N-3$人である．そこで，プレイヤーiとj以外のプレイヤーの中から１人を任意に固定し，プレイヤーkと呼びi，j，k以外のプレイヤー全員（$N-3$人）が CD を採るとする．プレイヤーkが CD を採るとすると $\xi(N-1)$ の評価を行うことができ，プレイヤーkが DD を採るとすると $\xi(N-2)$ の評価を行うことができる．プレイヤーの並び方としては次の３タイプを考えればよい．

タイプＡ：プレイヤーiよりも前にプレイヤーkがいる．

タイプＢ：プレイヤーiとプレイヤーjの間にプレイヤーkがいる．

タイプＣ：プレイヤーjの後にプレイヤーkがいる．

各タイプの並び方の総数を $\hat{N}_A, \hat{N}_B, \hat{N}_C$ とする．これらの３つのタイプの違いは，プレイヤーi，j，kの並び方の違いだけであるから $\hat{N}_A = \hat{N}_B = \hat{N}_C$ となる．

始めにプレイヤーkが CD を採るとして $\xi(N-1)$ を評価する．

タイプＡにおいて，プレイヤーjの後のプレイヤーの人数を $\hat{a}$ としよう．この人数が，第2部

における m_3 となる．$\hat{a}=t$ の並び方の総数をで表そう．さらに

$$\sum_{t=0}^{N-2} t n_{\hat{a}}(t)=\mu_{\hat{a}}$$

と表す．（プレイヤーi，j，k以外に CD プレイヤーは$N-3$ 人しかいないので $n_{\hat{a}}(N-2)=0$ であることに注意せよ）

タイプＢにおいて，プレイヤーjの後のプレイヤーの人数を $\hat{b}$ とする．この人数が，第2部における m_3 となる．$\hat{b}=t$ の並び方の総数を $n_{\hat{b}}(t)$ で表そう．第3部で論じたように，タイプＡとタイプＢの並び方は，プレイヤーiとkの順序のみが入れ替わるだけで，すべて1対1に対応するから，$n_{\hat{a}}(t)=n_{\hat{b}}(t)$ であり，したがって，

$$\sum_{t=0}^{N-2} t n_{\hat{b}}(t)=\mu_{\hat{a}}$$

である．

タイプＣにおいて，プレイヤーjとプレイヤーkの間の人数を $\hat{c}_1$ とし，プレイヤーkより後の人数を $\hat{c}_2$ とする．第2部における m_3 は $\hat{c}_1+\hat{c}_2+1$．$\hat{c}_1=t_1$ かつ $\hat{c}_2=t_2$ となる並び方の総数を $n_{\hat{c}_1\hat{c}_2}(t_1,t_2)$ で表す．$\hat{c}_1=t$ となる並び方の総数を $n_{\hat{c}_1}(t_1)$ で，$\hat{c}_2=t$ となる並び方の総数を $n_{\hat{c}_2}(t)$ で表す．第3部で示した $n_{c_1}(t)=n_{c_2}(t)$ と同じ理由で，$n_{\hat{c}_1}(t)=n_{\hat{c}_2}(t)$ が示される．また，上述の $n_{\hat{a}}(t)=n_{\hat{b}}(t)$ と同様の理由で，$n_{\hat{a}}(t)=n_{\hat{c}_2}(t)$ が示される．よって，

$$\sum_{t_1=0}^{N-2}(t_1+t_2)n_{\hat{c}_1\hat{c}_2}(t_1,t_2)=\sum_{t_1=0}^{N-2}t_1 n_{\hat{c}_1}(t_1)+\sum_{t_2=0}^{N-2}t_2 n_{\hat{c}_2}(t_2)=2\sum_{t=0}^{N-2}t n_{\hat{c}_2}(t)=2\mu_{\hat{a}}\ .$$

なお，プレイヤーi，j，k以外に CD プレイヤーは$N-3$ 人しかいないので $n_{\hat{c}_1}(N-2)=n_{\hat{c}_2}(N-2)=0$ であることに注意せよ．

以上により，

$$\xi(N-1)=\frac{\sum_{t=0}^{N-2} t\left(n_{\hat{a}}(t)+n_{\hat{b}}(t)+\sum_{t_1,t_2:t_1+t_2+1=t} n_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t_1,t_2)\right)}{\hat{N}_A+\hat{N}_B+\hat{N}_C}$$

は，

$$\text{分子}=\sum_{t=0}^{N-2}t n_{\hat{a}}(t)+\sum_{t=0}^{N-2}t n_{\hat{b}}(t)+\sum_{t_1=0}^{N-2}\sum_{t_2=0}^{N-2-t_1}(t_1+t_2+1)n_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t_1,t_2)$$

$$\geq\sum_{t=0}^{N-2}t n_{\hat{a}}(t)+\sum_{t=0}^{N-2}t n_{\hat{b}}(t)+\sum_{t_1=0}^{N-2}\sum_{t_2=0}^{N-2-t_1}(t_1+t_2)n_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t_1,t_2)=4\mu_{\hat{a}},$$

分母$=3\hat{N}_A$.

よって，$\xi(N-1)\geq\dfrac{4\mu_{\hat{a}}}{3\hat{N}_A}$となる．

次に，$\xi(N-2)$ を求めるために，プレイヤーkが DD プレイヤーである場合を考える．この場合，上述のタイプＡ，タイプＢの並び方は，第2部のタイプ３にはならない．タイプＣにおいて，プレイヤーjとプレイヤーkの間の人数である $\hat{c}_1$ が，第2部における m_3 となる．

よって，$\xi(N-2)=\dfrac{\sum_{t=0}^{N-3} tn_{\hat{c}_1}(t)}{\hat{N}_C}=\dfrac{\mu_{\hat{a}}}{\hat{N}_A}$，が得られる．こうして

$$\xi(N-1)=\frac{4\mu_{\hat{a}}}{3\hat{N}_A}>\frac{\mu_{\hat{a}}}{\hat{N}_A}=\xi(N-2)$$

が得られる．　（証明終）

4．むすび

N人囚人のジレンマを手番がランダムに決められる展開形ゲームに変更し，非協力探知型情報構造を仮定する．このとき，すべてのプレイヤーが共通の平行型線形利得関数を持つならば，ナッシュ均衡は，$(CD,\ldots,CD)$（あるいは一部のプレイヤーが CC をとる）と $(DD,\ldots,DD)$ の2種類しかないことが示された．多数均衡の場合に比べて，上記の2種類の均衡しかない場合には全員での協力が達成される均衡が選ばれる公算は格段に高まると言えよう．

社会的ジレンマの解決策を探るため，理論と実証の両面での研究が必要である．特に理論的研究においては，様々なアイデアによって解決策が検討されるべきである．非協力探知型情報構造による解決策の検討もその中の1つであり，本論文はこの解決策が特に有効となる状況を明らかにした．

参考文献

Dawes, R. M.（1980）“Social Dilemmas,” *Annual Review of Psychology* Vol. 31, pp. 169-193.

Fudenberg, D. and E. Maskin（1986）“The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting or with Incomplete Information,“ *Econometrica* Vol. 54, pp. 533-554.

Kalai, E.（1981）“Preplay Negotiations and the Prisoner’s Dilemma,” *Mathematical Social Siencies* Vol. 1, pp. 375-379.

Kaneko, M.（1982）“Some Remarks on the Folk Theorem in Game Theory,” *Mathematical Social Sciences* Vol.3, pp. 281-290.

Nishihara, K.（1997）“A Resolution of *N*-person Prisoners’Dilemma,” *Economic Theory* Vol. 10, pp. 531-540.

Nishihara, K.（1999）“Stability of the Cooperative Equilibrium in *N*-person Prisoners’Dilemma with Sequential Moves,” *Economic Theory* Vol. 13, pp. 483-494.

Okada, A.（1993）“The Possibility of Cooperation in an *n*-person Prisoners’Dilemma with Institutional Arrangements,” *Public Choice* Vol. 77, pp. 629-656.

Schelling, T.C.（1978）*Micromotives and Macrobehavior*, Toronto : W.W. Norton.

Shapley, L. and M. Shubik（1969）“On the Core of an Economic System with Externalities,” *American Economic Review* Vol. 59, pp. 678-684.

van Damme, E.（1991）*Stability and Perfection of Nash Equilibria*, 2nd edn. Berlin: Springer-Verlag.

山岸俊男（1990）社会的ジレンマのしくみ，サイエンス社．

〔にしはら　こう　福岡大学経済学部教授〕

〔2007年3月9日受理〕