

# 経営学における代数学

——線形代数からMax-Plus代数へ——

鈴木 香 織

## 1. はじめに

トロピカル幾何あるいはMax-Plus代数  $R_{max}$  とは、区分的に線形な、「トロピカル演算」により記述された幾何学的対象を扱う代数幾何学の一分野である。

1977年頃に研究が始まったMax-Plus代数は可換半環とよばれる性質を満たし、離散事象システムの記述方法として大変有用であった。1987年前後にはIEEEの大規模な論文集が発行されるなど大きく発展し、現在でも生産システムや交通システムなど様々な分野で利用されている重要なツールの一つである。離散事象システムにおいてこのMax-Plus代数が利用される理由として、システムの方程式を記述した場合にある種の線形性が現れ、その結果比較的容易に解が得られるという特性が挙げられる。

純粹数学的にも、2004年以降のMikhalkin, Sturmfelsらによるブレイクスルーの時期を経て今なお活発に研究が進められており、近年可視化を用いた代数幾何学の視点から新たなアプローチの兆しがみられ、経営学へのさらなる知見を与える可能性を秘めている。

本論文ではまず第2章で線形代数の基礎的概念について詳述し、行列を用いた経営学に関連する例についても述べる。これは現在、横浜国立大学経営学部における経営数学の授業内容に即する。

次の第3章では、Max-Plus代数を定義する上で欠かせない2つの演算 $\oplus$ ,  $\otimes$ を定義し、線形代数との類似性と相違性に触れつつその概念を説明する。

最後の第4章では応用として経営学における生産工程問題を取り扱う。ペトリネットを用いた生産工程はMax-Plus代数を用いて解けるケースが多くみられる。

本論文ではCONWIP (Constant work-in-progress) 方式とKANBAN方式の優位性についての比較を行った論文[Sa1]中の例題に焦点をあて、Max-Plus行列を用いて定式化した上で例題のKANBAN方式が対となるCONWIP方式よりも優れているという証明の一部別解を与える。

## 2. 経営数学と線形代数

ここでは行列の性質を軽く述べた後、経営数学のモデルではどのように使われるかを例とともに示す ([Su], [A]).

### 2.1 行列の演算

例えば

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 & 0 \\ 4 & \sqrt{2} & 2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

のように、いくつかの実数を長形状に配列したものを行列とよぶ。上の行列には2つの行と4つの列がある。

以下では主に用語について解説する。

**定義1.** 行列の行の数が  $m$ 、列の数が  $n$  であるとき、その行列を  $m \times n$  行列とよぶ。また、 $n \times n$  行列を  $n$  次正方行列という。  $1 \times n$  を行ベクトル、  $m \times 1$  を列ベクトルという。

**定義2.** 行列を構成する一つ一つの数を行列の成分とよぶ。ある成分が第  $i$  行に属し、かつ第  $j$  列に属するとき、その成分を  $(i, j)$  成分とよぶ。

**定義3.** 成分が全て0の行列を零行列とよび、  $O$  と書く。

**定義4.**  $n$  次正方行列に対し、  $a_{ii}$  成分全体を対角成分とよぶ。対角成分以外がすべて0の行列を対角行列とよぶ。対角成分がすべて1の対角行列を単位行列といい、  $E_n$  (または単に  $E$ ) と書く。

**定義5.** 行列  $A$  が与えられたとき、  $A$  の行と列を入れかえて得られる行列を  $A$  の転置行列とよび、  ${}^t A$  と書く。つまり  $A = (a_{ij})$  のとき、  ${}^t A = (b_{ij})$ 、  $b_{ij} = a_{ji}$ 。

**定義6.** すべての行と列にただ一つの1を成分としてもち、それ以外の成分は全て0となる  $n$  次正方行列を置換行列という。

[和と差]

二つの行列の和  $A+B$  (差  $A-B$ ) は  $A$  と  $B$  の型が同じときのみ考えられ、その  $(i, j)$  成分は  $A$  の  $(i, j)$  成分と  $B$  の  $(i, j)$  成分を加える (引く) ことで得られる。

$$\text{例1. } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \rightarrow A \pm B = \begin{pmatrix} a \pm e & b \pm f \\ c \pm g & d \pm h \end{pmatrix}$$

**命題1.** (1)  $A+B = B+A$  (交換法則)

(2)  $(A+B)+C = A+(B+C)$  (結合法則)

[実数倍]

定義 7.  $k$  を実数とする. 行列  $A$  を  $k$  倍した行列とは  $A$  のすべての成分を  $k$  倍して得られる行列のことである. これを  $kA$  と書く.

命題 2.  $k, l$  を実数とする. 行列  $A, B$  に対し次が成り立つ.

- (1)  $k(A + B) = kA + kB$  (分配法則)
- (2)  $(k + l)A = kA + lA$  (分配法則)
- (3)  $(-k)A = k(-A) = -kA$
- (4)  ${}^t(kA) = k{}^tA$
- (5)  $0A = O$

[行列の積]

定義 8. 行ベクトル  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  と列ベクトル  $Y = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_n)$  に対しそれらの積を

$$XY = (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)$$

で定める.

この行ベクトルと列ベクトルの積を用いて一般の行列の積は次のように定義される.

定義 9.  $A$  の行ベクトルの次元と  $B$  の列ベクトルの次元が同じとき, 積  $AB$  を [ $AB$  の  $(i, j)$  成分] = [ $A$  の第  $i$  行ベクトルと  $B$  の第  $j$  列ベクトルの積] で定義する. つまり, 行列  $A$  が  $l \times m$  型で, 行列  $B$  が  $m \times n$  型のときにのみ積  $AB$  は定義され, 答えは  $l \times n$  型の行列となる.

例 2. 
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

命題 3. 行列  $A, B, C$  に対し積が定義されているとき次が成り立つ ( $k, l$  は実数).

- (1)  $(AB)C = A(BC) = ABC$  (結合法則)
- (2)  $A(B + C) = AB + AC$  (分配法則)
- (3)  $(A + B)C = AC + BC$  (分配法則)
- (4)  $(kl)A = k(lA), (kA)B = k(AB)$  (結合法則)

一般に  $AB$  と  $BA$  は等しいとは限らない.

例 3. 
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だが, } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$A$  の  $n$  個の積  $AAA \dots A$  を  $A^n$  で表す.

## 2.2 逆行列と行列式

**定義10.** 正方行列 $A$ に対し,  $AB = BA = E$ をみたす行列 $B$ が存在するとき,  $B$ を $A$ の逆行列とよび $A^{-1}$ と書く.

行列 $A$ に対して逆行列が存在するならば, それはただ一つである.

**定義11.** 正方行列 $A$ が逆行列をもつとき,  $A$ を正則行列とよぶ.

**定義12.** (行基本変形). (1) 二つの行を入れ替える

例 ① $\leftrightarrow$ ②: 1行目と2行目を入れ替える

(2) ある行を(0でない)定数倍する

例 ① $\times 3$ : 1行目を3倍する

(3) ある行に別の行の定数倍を足したり引いたりする

例 ② + ① $\times 2$ : 2行目に1行目を2倍したものを加える

**注1.** 列についても列基本変形が定義できる.

$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ のとき  $E \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ に注意すると次が成り立つ

**命題4.** 2次正方行列 $A$ の右側に $E_2$ を付け加えてできる $2 \times 4$ の拡大行列を行基本変形して左半分を $E_2$ にできたとき,  $A$ には逆行列が存在し,  $A^{-1}$ は基本変形した後の右半分になる.

つまり  $\left( \begin{array}{cc|c|c} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \cdots \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & e & f \\ 0 & 1 & g & h \end{array} \right)$ ならば

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

**例4.**

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$$

を逆行列を用いて解く.

与えられた連立方程式を行列表示すると

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

まず行基本変形を行って  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$  を求める.

$$\begin{aligned}
 \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{\textcircled{2}-\textcircled{1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\textcircled{1}-\textcircled{2}\times 2} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\textcircled{1}\leftrightarrow\textcircled{2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -2 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\textcircled{1}\times\frac{1}{5}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\textcircled{1}+\textcircled{2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

よって  $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{pmatrix}$  となる. 最初の式に両辺左から  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$  をかけて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5}\cdot 9 + \frac{3}{5}\cdot 11 \\ \frac{3}{5}\cdot 9 - \frac{2}{5}\cdot 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって  $x = 3, y = 1$  が求める解になる.

最初に置換について説明し, その記号を用いて行列式を定義する.

**定義13.**  $n$  を自然数とする.  $n$  に対し  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  という集合を考える. この  $I$  に対し,  $I$  から  $I$  への 1 対 1 の写像を置換とよぶ. すべての  $n$  文字の置換のなす集合を  $S_n$  であらわす.

**例5.**  $I = \{1, 2, 3\}$  に対して  $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1$  が成り立つとき,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**定義14.**  $\sigma \in S_n$  に対し  $T(\sigma) = \{(p_i, p_j) \mid 1 \leq i < j \leq n, p_i > p_j\}$  で定め, 追い越し数とよぶ. また,  $(-1)^{\#T(\sigma)}$  を  $\sigma$  の符号とよぶ.

**例6.**  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  に対し  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^4 = 1$

符号  $\varepsilon(\sigma)$  を用いて  $n$  次正方行列  $A = (a_{ij})$  の行列式  $|A|$  を次のように定義する.

定義15.

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

符号が+のときの置換を偶置換, -のときの置換を奇置換とよぶ.

$|A|$ は $\det A$ とも書かれる.

実際の行列式の計算には置換ではなく, 余因子定理を用いることが多い.

定義16. 行列  $A = (a_{ij})$  に対し,  $A$  の第  $i$  行と第  $j$  列を除いて得られる小行列  $D_{ij}$  の行列式に  $(-1)^{i+j}$  を掛けて得られる値  $(-1)^{i+j}|D_{ij}|$  を  $A$  の  $(i, j)$  成分の余因子とよび,  $\widetilde{a}_{ij}$  と書く.  $A_{ij}$  と書くこともある.

一般に次の定理が成り立つ.

定理17 (余因子展開定理).  $n$  次正方行列  $A = (a_{ij})$  に対し,

$$|A| = a_{i1}\widetilde{a}_{i1} + a_{i2}\widetilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\widetilde{a}_{in}$$

が成り立つ. これを“第  $i$  行についての余因子展開”とよぶ. また,

$$|A| = a_{1j}\widetilde{a}_{1j} + a_{2j}\widetilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\widetilde{a}_{nj}$$

を“第  $j$  列についての余因子展開”とよぶ.

この定理により,  $n$  次正方行列の行列式を  $(n-1)$  個の  $n-1$  次正方行列の行列式に帰着して求めることができるようになる.

例7.  $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$  の行列式は第2行で余因子展開をすると,

$$|A| = 0(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -4 & 7 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 4$$

### 2.3 固有値と固有ベクトル

定義18. 行列  $A$  に対し,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  が固有値  $\lambda$  に対する固有ベクトルであるとは,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

となる実数  $\lambda$  が存在することである. この  $\lambda$  を  $A$  の固有値とよぶ.

$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} = \lambda E\mathbf{x}$  より,  $(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . ここで  $(A - \lambda E)^{-1}$  が存在すれば  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  となること

から、次の定理が得られる。

**定理19.**  $\lambda$  が行列  $A$  の固有値である必要十分条件は

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

上式を行列  $A$  の固有方程式とよぶ。

固有値, 固有方程式は次の性質が成り立つ。

**定理20.**

(1) 行列  $A$  が異なる固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  を持つとき, 対応する固有ベクトル  $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots$  は 1 次独立である。

(2)  $A$  が正則行列ならば,  $A$  の固有値  $\lambda$  は 0 ではない。また,  $\frac{1}{\lambda}$  は  $A^{-1}$  の固有値のうちの一つになる。

**例 8.**  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$  の固有値と固有ベクトルを求める。

固有方程式は

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)\left(\frac{1}{6} + \lambda\right) = 0.$$

よって,  $\lambda = 1 - \frac{1}{6}$  が  $A$  の固有値。

求める固有ベクトルを  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  とおく。

(1) 固有値 1 のとき。

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ より } \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = x \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = y \end{cases}.$$

これから  $3x = 4y$ 。

よって, 固有値 1 に対応する固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  である。

(2) 固有値  $-\frac{1}{6}$  のとき。

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ より } \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = -\frac{1}{6}x \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = -\frac{1}{6}y \end{cases}.$$

これから固有値  $-\frac{1}{6}$  に対応する固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  である。

次の定理は有名である.

**定理21.** (ケーリー・ハミルトンの定理)

$n$ 次正方行列 $A$ に対し,

$$F(x) = \det(xE - A)$$

とすると $F(A) = O$ が成り立つ.

## 2.4 行列の対角化

**定理22.**  $n \times n$  行列 $A$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とし, それぞれに対する固有ベクトルを $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ とする. 各 $\mathbf{x}_i$ を列ベクトルとするような行列を $P = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n)$ と書くとき

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ. これを ( $P$ による)  $A$ の対角化とよぶ.

**定理23.** 重複度 $n$ の固有値に対応する1次独立な固有ベクトルが $n$ 個存在する

$\Downarrow$

対角化可能

以下ではすべての時点において, 有限個の状態の中からある一つの状態に推移するシステムを考える ([A]).

**定義24.** 推移の仕方が確率で決まるシステムを確率過程という. 推移が直前の状態にのみ依存する確率過程をマルコフ過程とよび, 特に離散時間のみで考える場合にマルコフ連鎖という.

**定義25.** 状態 $j$ から $i$ に推移する確率 $p_{ij}$ すべてを並べてできる行列 $(p_{ij})$ を推移(確率)行列とよぶ. 推移行列が何乗かするとすべての成分が正となるときに正規という.

最初に [N] の問題7.1.1を一部改題したものを紹介した後に, 一般の行列で成り立つ性質について述べる.

**例 9.** ある社員食堂で毎日A, B 2種類のランチを提供し, 100人の社員が1日1回どちらかを必ず食べていたとする. また, 次のような食事の傾向も分かっているとする.

- 1 セットAを食べた翌日にセットAを食べる確率は $\frac{1}{2}$ , セットBを食べる確率は $\frac{1}{2}$ .
- 2 セットBを食べた翌日にセットAを食べる確率は $\frac{2}{3}$ , セットBを食べる確率は $\frac{1}{3}$ .

元旦に  $x$  人がセット  $A$  を  $y = 100 - x$  人がセット  $B$  を食べたとする. このとき 1 月 2 日にセット  $A, B$  を食べる人数をそれぞれ  $x_2, y_2$  人とすれば  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$  に対し,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で与えられる. さらに  $n+1$  日後の人数を  $x_{n+1}, y_{n+1}$  とすると同様に

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

例 8 ですすでに得られた固有値と固有ベクトルから,  $A$  は  $P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  を用いて

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

と対角化できるので,  $n+1$  日後にセット  $A$  と  $B$  を食べる人数は次式で与えられる

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} A^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P(P^{-1}AP)^n P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{400}{7} + \left(-\frac{1}{6}\right)^n \frac{3x-4y}{7} \\ \frac{300}{7} - \left(-\frac{1}{6}\right)^n \frac{3x-4y}{7} \end{pmatrix}.$$

注 2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{400}{7} \\ \frac{300}{7} \end{pmatrix}$  より, 無限に日数が経過すると元旦の人数によらず一定の割合に定まる. これを定常状態とよぶ.

マルコフ連鎖に付随する推移行列  $A$  が正規であるときに, 次の性質が成り立つ.

**定理 26.** 任意の確率ベクトル  $x$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n x = \mathbf{q}$$

となるような, すべての成分が正である確率ベクトル  $\mathbf{q}$  が存在する.

$\mathbf{q}$  は  $A\mathbf{q} = \mathbf{q}$  をみたすただ一つの確率ベクトルとしても計算できる. 言いかえと, 連立方程式  $(E - A)\mathbf{q} = \mathbf{0}$  の解となる確率ベクトルはただ一つに定まり, そのベクトルが定常状態を表す. つまり固有値 1 に対応する固有ベクトルである.

マルコフ連鎖のモデルでは各列 (あるいは行) の成分すべてを足すと 1 となる行列を考えていた. この条件を満たさない場合であっても,  $(E - A)^{-1}$  が答えを導くために重要な役割を果たすモデルが存在する.

## 2.5 レオンチェフモデル

まず、レオンチェフ閉モデル（あるいは生産モデル）について例を用いて紹介する。

## 例10. ([A], 第8章問題4)

A, B, Cの3人がそれぞれ野菜畑をもっているとし, Aはトマト, Bはトウモロコシ, Cはレタスを作っているとする. あるとき3人はそれぞれ $x_1, x_2, x_3$ ドル分の自分の作物を提供しあい, 次のように分け合うことにした:

- (1) Aはトマトの $\frac{1}{3}$ , トウモロコシの $\frac{1}{3}$ , レタスの $\frac{1}{4}$ をもらう.
- (2) Bはトマトの $\frac{1}{2}$ , トウモロコシの $\frac{1}{3}$ , レタスの $\frac{1}{4}$ をもらう.
- (3) Cはトマトの $\frac{1}{6}$ , トウモロコシの $\frac{1}{3}$ , レタスの $\frac{1}{2}$ をもらう.

互いに提供した金額に見合う野菜を受け取る場合の ${}^t\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ は次で求められる.

まずAが受け取る野菜の金額は提供した野菜の金額と等しいので,

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = x_1.$$

同様に

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = x_2,$$

$$\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = x_3.$$

したがって受け取る野菜の比率を並べてできる行列を

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

とすると, 題意をみたす方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ .  $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ をみたす非負ベクトル $\mathbf{x}$ によって $x_1, x_2, x_3$ の価格は定まる. たとえば $x_1 = 30$ のときには $x_2 = 36, x_3 = 32$ .

より一般的に, レオンチェフ方程式の右辺の $\mathbf{0}$ を非負の実数 $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ )たちで置きかえてできる方程式のモデルを考えるのは自然である. これをレオンチェフ開モデルといい,  $c_i$ たちを並べてできるベクトル $\mathbf{c}$ を最終需要ベクトルとよぶ.

レオンチェフ開モデルの生産ベクトル $\mathbf{x}$ は $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{c}$ が非負の解をもつ場合として得られる. 判定条件のひとつが次の定理で与えられる.

**定理27.**  $(E - A)x = c$  ( $A \geq 0$ )がどの  $c \geq 0$  に対しても非負解をもつための必要十分条件は  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = O$ . このとき

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^n + \cdots$$

が成り立つ.

### 2.6 レスリーモデル

メスの個体を年齢ごとのクラスに分け, その変化の様子を調べるためのモデルを考える. 一般的な設定としてはその「種の」のメスが到達しうる最高年齢を  $M$  とし,  $n$  個の均等な年齢幅  $\frac{M}{n}$  をもつクラスに分ける. このときクラス  $k$  に所属するメスの年齢は  $\frac{(n-1)}{n}M$  となっている.

以下では簡単のために時間を離散時間  $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$  で考え, 各  $t_k$  と  $t_{k+1}$  の間隔はクラスの幅と一致する  $\left(t_k = \frac{k}{n}M\right)$  ものを考える. 時刻  $t_k$  におけるクラス  $i$  の個体数を  $x_i^{(k)}$  で定めること

で, 年齢分布ベクトル  $\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$  および初期年齢分布ベクトル  $\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$  が得られる.

メス一匹がクラス  $i$  に属している間に産むメスの子供の平均個体数を  $a_i$  とし, クラス  $i$  から  $i+1$  にまで生き延びる個体比率を  $b_i$  とおく.

定義より直ちに

- (1)  $a_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),
- (2)  $0 < b_i \leq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ).

これら2つのパラメーターを用いて得られる連立方程式

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = b_1 x_1^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = b_2 x_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} = b_{n-1} x_{n-1}^{(k-1)} \end{cases}$$

を行列表示した

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

の右辺に現れる行列はレスリー行列とよばれ、通常 $L$ と表現される。

マルコフ連鎖の場合と同様に $\lim_{n \rightarrow \infty} L^n$ を計算することで遠い未来における各クラス毎の分布の変化の様子を知ることが可能となる。したがって $L$ の固有値および固有ベクトルを考察する必要があるが、レスリーモデルではマルコフ連鎖とは異なり、未来を予測する固有ベクトルの固有値は1とは限らない。

中間値の定理およびレスリー行列独特の成分の配列によって得られる次の定理が計算に用いられる。

**定理28.** ([A]) レスリー行列には重複度1の正の固有値 $\lambda$ がただ一つ存在する。また、この固有値に対する固有ベクトルとしてすべての成分が正となるものが存在する。 $\lambda$ を主要固有値とよぶ。

注3. 具体的には以下で与えられ、代入によって確かめられる。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda^2} \\ \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda^3} \\ \vdots \\ \frac{b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}{\lambda^{n-1}} \end{pmatrix}.$$

固有値が主要固有値となるための十分条件は次の定理により与えられる。

**定理29.** ([A]) レスリー行列 $L$ の第一行目に、ともに0ではない隣り合う成分が存在するならば $L$ の正の固有値 $\lambda$ が主要固有値となる。

つまり十分に時間が経過するならば、年齢分布ベクトルはその前の段階の年齢分布ベクトルの定数倍となり、かつその定数はレスリー行列の正の固有値であることが示される。さらに、各クラスの個体数の比率は固有ベクトルで決まる、ある一定の値に近づく。

**例11.** ([A])

メスの最高寿命が15歳である動物について、全体を5年ごと3つのクラスに分けたときのレ

スリー行列が $L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$ で与えられるモデルを考える。

固有方程式  $\begin{vmatrix} -\lambda & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda + \frac{3}{8} = 0$  を解くと正の固有値は  $\lambda = \frac{3}{2}$  のみであり, 対応する固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} \end{pmatrix}$  で与えられる.

例11は十分に時間がたてばそれぞれのクラスに属するメスの個体数は5年ごとに50%増加し, マルコフ連鎖の場合と同様に初期年齢分布ベクトルの値にかかわらず  $1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{18}$  の個体数比に近づいていくことを示している.

### 3. Max-Plus代数

この節におけるMax-Plus代数の記述は主に[H]による.

以下では慣例に従い  $-\infty$  を  $\varepsilon$ ,  $0$  を  $e$  で表す. また,  $\mathbf{R}_\varepsilon := \mathbf{R} \cup \{\varepsilon\}$  とおく.

#### 3.1 演算と基本性質

$\mathbf{R}_\varepsilon$  の元  $x, y$  に対し次の2つの演算  $\otimes, \oplus$  を定める. これら2つの演算を併せてトロピカル演算とよぶ.

$$x \oplus y = \max(x, y), \quad x \otimes y = x + y.$$

例12.  $2 \oplus 3 = \max(2, 3) = 3, \quad x \oplus \varepsilon = \max(x, -\infty) = x,$   
 $2 \otimes 3 = 2 + 3 = 5, \quad x \otimes e = x + \varepsilon = x.$

これら2つの演算に対し,  $\mathbf{R}_{max} := (\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$  は次の性質をみたす半体となる.

命題5.  $x, y, z \in \mathbf{R}_\varepsilon$  に対し次が成り立つ.

- (1)  $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$  (結合法則)
- (2)  $x \oplus y = y \oplus x$  (交換法則)
- (3)  $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$  (分配法則)
- (4)  $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$  (零元の存在)
- (5)  $x \otimes e = e \otimes x = x$  (単位元の存在)
- (6)  $x \neq \varepsilon$  に対し,  $x \otimes y = e$  となる  $y$  は  $-x$  のみ (逆元の存在)
- (7)  $x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$  (零元への吸収)
- (8)  $x \oplus x = x$  (べき等)

注4. 一般に,  $\otimes$  に関する逆元は存在しない. つまり引き算に相当するものはない. また, 指数  $n$  ( $n \geq 0$ ) を

$$x^{\otimes n} := \underbrace{x \otimes x \otimes \cdots \otimes x}_n = nx$$

によって表す. ただし  $x^{\otimes e} = e$  であり, 負のべきは定義されない.

一般の積  $\times$  と同様に指数が実数の場合にも容易に拡張される.

### 3.2 Max-Plus代数における行列

Max-Plus代数上の行列および行列の演算も多くは第2章で述べたのと同様に定義される. (ただし引き算は定義されない).

**定義30.** 成分が全て  $e$  の行列を零行列とよび,  $\mathcal{E}$  と書く.

**例13.**  $\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$  は  $2 \times 2$  の零行列

**定義31.** 対角成分以外がすべて  $\varepsilon$  の  $n$  次正方行列を対角行列とよぶ. 対角成分がすべて  $e$  の対角行列を単位行列といい,  $E_n$  (または単に  $E$ ) と書く.

[和]

二つの行列の和  $A+B$  は  $A$  と  $B$  の型が同じ場合にのみ考えられ, その  $(i, j)$  成分は  $A$  の  $(i, j)$  成分と  $B$  の  $(i, j)$  成分を加えることで得られる.

**例14.**  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \rightarrow A \oplus B = \begin{pmatrix} a \oplus e & b \oplus f \\ c \oplus g & d \oplus h \end{pmatrix}$

**命題6.** (1)  $A \oplus B = B \oplus A$  (交換法則)

(2)  $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$  (結合法則)

(3)  $A \oplus A = A$  (べき等)

[実数倍]

**定義32.**  $k$  を実数とする. 行列  $A$  を  $k$  倍した行列とは,  $A$  のすべての成分に  $k$  を加えて得られる行列のことであり,  $k \otimes A$  と書く.

**命題7.**  $k, l$  を実数とする. 行列  $A, B$  に対し次が成り立つ.

(1)  $k \otimes (A \oplus B) = k \otimes A \oplus k \otimes B$  (分配法則)

(2)  $(k \oplus l) \otimes A = k \otimes A \oplus l \otimes A$  (分配法則)

(3)  ${}^t(k \otimes A) = k \otimes {}^tA$

(4)  $e \otimes A = e$

[行列の積]

**定義33.** 行ベクトル  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  と列ベクトル  $Y = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_n)$  に対しそれらの積を

$$XY = (x_1 \otimes y_1 \oplus x_2 \otimes y_2 \oplus \cdots \oplus x_n \otimes y_n)$$

で定める.

**定義34.**  $A$  の行ベクトルの次元と  $B$  の列ベクトルの次元が同じとき, 積  $AB$  を [ $AB$  の  $(i, j)$  成分] = [ $A$  の第  $i$  行ベクトルと  $B$  の第  $j$  列ベクトルの積] で定義する.

例15. 
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{11} \otimes b_{11} \oplus a_{12} \otimes b_{21} & a_{11} \otimes b_{12} \oplus a_{12} \otimes b_{22} \\ a_{21} \otimes b_{11} \oplus a_{22} \otimes b_{21} & a_{21} \otimes b_{12} \oplus a_{22} \otimes b_{22} \end{pmatrix}$$

**命題 8.** 行列  $A, B, C$  に対し積が定義されているとき次が成り立つ ( $k, l$  は実数).

- (1)  $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C) = A \otimes B \otimes C$  (結合法則)
- (2)  $A \otimes (B \oplus C) = A \otimes B \oplus A \otimes C$  (分配法則)
- (3)  $(A \oplus B) \otimes C = A \otimes C \oplus B \otimes C$  (分配法則)
- (4)  $(k \otimes l) \otimes A = k \otimes (l \otimes A), (k \otimes A) \otimes B = k \otimes (A \otimes B)$  (結合法則)

線形代数の場合と同様に  $A \otimes B$  と  $B \otimes A$  は等しいとは限らない.

例16. 
$$\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ e & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ だが, } \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ e & e \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \varepsilon \\ 5 & e \end{pmatrix}$$

**定義35.** 非負  $n$  次正方形行列  $A$  に対し,  $A^n$  のどの  $(i, j)$  成分  $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}$  も  $e$  とならないような自然数  $n$  が存在するとき,  $A$  は既約行列であるという.

### 3.3 逆行列と行列式

**定義36.** 正方形行列  $A$  に対し,  $A \otimes B = B \otimes A = E$  をみたす行列  $B$  が存在するとき,  $B$  を  $A$  の逆行列とよび  $A^{-1}$  と書く.

例17. 
$$\begin{pmatrix} \varepsilon & -1 \\ -2 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{pmatrix}. \text{ 逆も同様に成立. よって } \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 \\ -2 & \varepsilon \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

**定理37.** 行列  $A$  に対して逆行列が存在するなら, それはただ一つである.

**定義38.** 正方形行列  $A$  が逆行列をもつとき,  $A$  を正則行列とよぶ.

**命題 9.**  $n$  次正方形行列  $A, B$  が正則のとき, 次が成り立つ.

- (1)  $A^{-1}$  は正則で,  $(A^{-1})^{-1} = A$
- (2)  $(A \otimes B)^{-1}$  は正則で,  $(A \otimes B)^{-1} = B^{-1} \otimes A^{-1}$

Max-Plus代数上で逆行列が存在するための必要十分条件は通常の線形代数の場合とは異なる.

**定理39.**  $n$ 次正方行列 $A$ が逆行列をもつための必要十分条件は $A=B \otimes C$ と書けることである。(ただし $B$ はすべての対角要素が $\varepsilon$ ではない対角行列であり,  $C$ は置換行列).

注5. このとき $B^{-1} = {}^t B$ であり,  $C^{-1}$ は $C$ のすべての対角成分に負の符号 $-$ をつけて残りはそのままできる対角行列として容易に求められる.

例18. 例17で

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & -1 \\ -2 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & -2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon & e \\ e & \varepsilon \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & -1 \\ -2 & \varepsilon \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon & e \\ e & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

線形代数では行列式は通常余因子定理や公式を用いて計算したが, Max-Plus代数では引き算がないので工夫の必要がある. そこで, 行列式の代わりにpermanentで代用する.

**定義40.**  $n$ 次正方行列 $A = (a_{ij})$  ( $i, j = 1, \dots, n$ )に対し,

$$\text{perm}(A) = \bigoplus_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \otimes a_{2\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes a_{n\sigma(n)}.$$

を $A$ のpermanentとよぶ.

**定理41.**  $A$ が正則行列ならば $\text{perm}(A) \neq \varepsilon$

逆は必ずしも成り立たない. 例えば,

例19.  $A = \begin{pmatrix} e & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ に対し,  $\text{perm}(A) = \max\{3+4, e+2\} = 7 \neq \varepsilon$ だが,  $A$ は正則行列ではない.

### 3.4 固有値と固有ベクトル

**定義42.** 行列 $A$ に対し,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が固有値 $\lambda$ に対する固有ベクトルであるとは,

$$A \otimes \mathbf{x} = \lambda \otimes \mathbf{x}$$

となる実数 $\lambda$ が存在することである. この $\lambda$ を $A$ の固有値とよぶ.

例20.  $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ は固有値4を持ち, 対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$ .

特に既約行列の固有値について次の定理が知られている.

定理43. 既約行列は正の固有値をただ一つもつ.

Max-Plus代数では実際に計算する上で用いられる手法がいくつかあるが, 周期性に着目する場合は次の定理による.

定理44.  $n$  次正方既約行列  $A$  に対し,  $n$  次元ベクトルの組  $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(d)}$  ( $d \geq 1$ ) が

$$\rho \otimes \mathbf{x}^{(1)} = A \otimes \mathbf{x}^{(d)} \quad \text{かつ} \quad \mathbf{x}^{(i+1)} = A \otimes \mathbf{x}^{(i)}, \quad i \in [1, 2, \dots, n-1]$$

をみたすとする.

このとき,  $A$  の固有値  $\lambda$  は  $\rho = \lambda^{\otimes d}$  で与えられ, 対応する固有ベクトルは

$$\bigoplus_{i=1}^d \lambda^{\otimes(d-i)} \otimes \mathbf{x}^{(i)}$$

となる.

定理45.  $n$  次正方既約行列  $A$  に対し, その正の固有値は

$$\max_{i=1, \dots, n} \left\{ \min_{k=0, \dots, n-1} \frac{[A^{\otimes n}]_{ij} - [A^{\otimes k}]_{ij}}{n - k} \right\}.$$

で与えられる.

上の定理をもとにしたKarpのアルゴリズムの手順は次の通りである.

Step. 1  $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \end{pmatrix}$  とおく.

Step. 2  $\mathbf{x}^{(k)} = A \otimes \mathbf{x}^{(k-1)}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) を求める.

Step. 3  $\max_{i=1, \dots, n} \left\{ \min_{k=0, \dots, n-1} \frac{\mathbf{x}_i^{(n)} - \mathbf{x}_i^{(k)}}{n - k} \right\}$  が求める  $A$  の正の固有値.

例21. 既約行列  $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 3 & \varepsilon & 1 \\ 2 & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ 1 & 2 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$  の固有値をKarpのアルゴリズムで求める.

$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \end{pmatrix}$  とおくと

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 2 \\ 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

それぞれに対し  $\min_{k=0, \dots, n-1} \frac{x_i^{(n)} - x_i^{(k)}}{n-k}$  を計算すると

$$2.5, 0, 2.5, 2$$

となるので、求める固有値は2.5となる。

Karpのアルゴリズムはそれ自身では固有ベクトルを求めるものではない。これを修正した次のべきアルゴリズムも良く用いられる。

$$\text{Step. 1} \quad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \end{pmatrix} \text{とおく.}$$

Step. 2  $\mathbf{x}^{(p)} = A \otimes \mathbf{x}^{(p-1)}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) に対し  $p > q \geq 0$  であって  $\mathbf{x}^{(p)} = \mathbf{x}^{(q)} \otimes c$  となるような実数  $c$  が存在するものを見つけ出す。

Step. 3  $\lambda = \frac{c}{p-q}$  が求める固有値かつ対応する固有ベクトルは、

$$\bigoplus_{j=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-j)} \otimes \mathbf{x}^{(q+j-1)})$$

以下では例21の  $A$  について、その固有値をべきアルゴリズムによって求めてみる。

例22.

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 2 \\ 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

であった。これより  $\mathbf{x}^{(4)} = 5 \otimes \mathbf{x}^{(2)}$  なので  $p = 4, q = 2, c = 5$  とおくと、Step. 3の式より  $\lambda = 2.5$  を得る。対応する固有ベクトルは、Step. 3の式に代入して

$$(\lambda \otimes \mathbf{x}^{(2)} \oplus \mathbf{x}^{(3)}) = \begin{pmatrix} 7.5 \\ 7 \\ 6.5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Max-Plus代数における固有方程式を書き下す方法についてはまず[B]で与えられた後, 設定のミス修正が[Sc]によってなされている.

はじめにいくつかの記号を準備する.

まずすべての置換  $\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  中の偶置換全体を  $P_n^e$ , 奇置換全体を  $P_n^o$  で表す. また,  $\{1, 2, \dots, n\}$  から  $k$  個を選ぶ場合のすべての組み合わせ全体の集合を  $C_n^k$  と書く.

**定義46.**  $\Gamma_k = \{\zeta \mid \exists \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \in C_n^k, \exists \rho \in P_k^e \cup P_k^o \text{ s.t. } \zeta = \sum_r^k a_{i_r i \rho(r)}\}$  とおく.

$$I_n^e := \#\{\rho \in P_k^e \mid \exists \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \in C_n^k, \zeta = \sum_r^k a_{i_r i \rho(r)}\},$$

$$I_n^o := \#\{\rho \in P_k^o \mid \exists \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \in C_n^k, \zeta = \sum_r^k a_{i_r i \rho(r)}\}$$

に対し,

$$d_k := \max\{\zeta \in \Gamma_k \mid I_k^e(\zeta) \neq I_k^o(\zeta)\}$$

とする.

このとき, 固有方程式は次の式によって与えられる.

**定義47.**  $n$  次正方行列  $A$  に対する固有方程式は

$$\lambda^{\otimes n} \oplus \bigoplus_{k \in \mathcal{I}} d_k \otimes \lambda^{\otimes n-k} = \bigoplus_{k \in \mathcal{J}} d_k \otimes \lambda^{\otimes n-k}$$

ただし

$$\mathcal{I} := \{k \mid (-1)^k I(d_k) > 0 \ (k = 1, 2, \dots)\}, \quad \mathcal{J} := \{k \mid (-1)^k I(d_k) < 0 \ (k = 1, 2, \dots)\}.$$

また, 線形代数の場合と同様に次も成り立つ.

**定理48.**  $n$  次正方行列  $A$  は自身の固有方程式をみたく. すなわち,

$$A^{\otimes n} \oplus \bigoplus_{k \in \mathcal{I}} d_k \otimes A^{\otimes n-k} = \bigoplus_{k \in \mathcal{J}} d_k \otimes A^{\otimes n-k}$$

上の式がmax-plus代数における一般次元のケーリー・ハミルトンの定理である.

**例23.**  $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  に対し  $\Gamma_1 = \{3, 4\}$ ,  $\Gamma_2 = \{7, 9\}$  かつ  $I_1^e(3) - I_1^o(3) = 1$ ,  $I_1^e(4) - I_1^o(4) = 1$ ,

$I_1^e(7) - I_1^o(7) = 1$ ,  $I_1^e(9) - I_1^o(9) = -1$  となり  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 7$ . また,  $\mathcal{I} = \{2\}$ ,  $\mathcal{J} = \{1\}$  により与えられた行列の固有変数式は

$$\lambda^{\otimes 2} \oplus 7 = 4 \otimes \lambda.$$

つまり線形代数における固有方程式の負の項を移行し、すべての項が正となるようにしたものがMax-Plus代数における固有方程式だと考えればよい。

#### 4. 離散事象動的システムにおける一例

以下特に断らない限り、ペトリネットの解説は[M]、業務取引ペトリネットの解説は[Sa2], [Sa3]による。

##### 4.1 業務取引ペトリネット

ペトリネットは、1962年にペトリによって導入された有効グラフで、プレースとよばれる円で表される有限個のノードの組  $P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$  と、トランジションとよばれる線分で表される有限個のノードの組  $T = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  からなる。

プレースとトランジションはアークによって結ばれ、それに対し重みとよばれる正整数が付記される。ただし、重みが1の場合には省略する。さらに、プレース上には非負整数個の黒い点で表されるトークンが置かれる。各プレース内のトークンの配置をマーキングとよぶ。通常マーキングはトークンの各プレースへの分布を表したベクトルを用いて表される。ペトリネットはマーキングによって動的な分析が行うことが可能だが、これは他の手法に比べ優位な点となっている。

より正確な定義は

##### 定義49. [M]

上の  $P, T$  ( $P \cap T = \emptyset$ ) および

$F \subset (P \times T) \cup (T \times P)$  : アークの集合

$W : F \rightarrow \mathbf{N}$  : アークの重み付け関数

$\mu_0 : P \rightarrow \mathbf{Z}_{\geq 0}$  : 初期マーキング状態 (プレース  $p_i$  中のトークンの個数)

に対しペトリネットを組  $\{P, T, F, W, \mu_0\}$  で定める。

上の定義によりプレースとプレース、トランジションとトランジションを結ぶアークは存在しないことがわかる。

定義50. トランジション  $t$  に向かうアークを  $t$  の入力アーク、 $t$  の入力アークが出ていくプレースを  $t$  の入力プレースとよぶ。  $t$  の入力プレースの集合を  $I(t)$  と書く。

また  $t$  から出て行くアークを出力アーク、 $t$  の出力アークが入って行く先のプレースを  $t$  の出力プレースとよぶ。  $t$  の出力プレース全体の集合を  $O(t)$  と書く。

プレース  $p$  の出入力アークおよび出入力プレースも同様にして定義ができる。

定義51. 入力アークをもたないトランジション  $t$  が存在しないペトリネットをautonomousなペトリネットという。

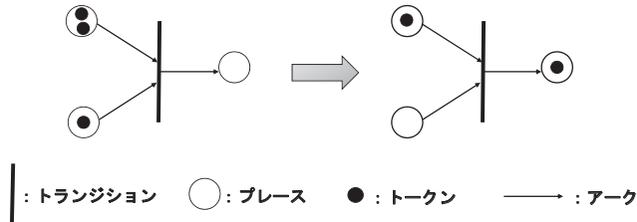
以下ではペトリネットはすべてautonomousな場合のみを考える。

与えられたペトリネットに対し  $(p, t) \in F$  により  $p$  から  $t$  へのアークの方向を表し,  $W(p, t)$  で  $p$  から  $t$  へのアークの重みを表すことにする。

ペトリネットの初期マーキングから状態を変化させるためには, 発火とよばれる動作が必要になる。  $t$  が発火したとき, 各入力プレースから入力アークそれぞれの重み  $W(p, t)$  と等しい数のトークンを取り去り, 各出力プレースから出力アークそれぞれの重み  $W(p, t)$  と等しい数のトークンが加わる。

**定義52.** トランジション  $t$  が発火可能であるとは, 任意の  $p \in I(t)$  に  $W(p, t)$  以上のトークンが存在することである。

発火可能なペトリネットの例としては下図のようなものがある。



**トランジションの発火**

**定義53.** ペトリネットのすべてのトランジションが有限時間内に発火可能であるときに活性であるという。

**定義54.** ペトリネットが次のすべての条件をみたすとき, 時間付きイベントグラフとよぶ。

- (1) すべてのプレースの前後には一つのトランジションのみが存在する。
- (2) トランジションが発火時間をもつ。
- (3) プレースの中にあるトークンは, 下流にあるトランジションの発火に参与する前に費やす保持時間をもつ。
- (4) すべてのプレースに  $k$  回目に入ってきたトークンは  $k$  回目に利用可能になる。
- (5) すべてのトランジションの  $k$  回目の発火において発火の開始も終了も  $k$  回目となっている。

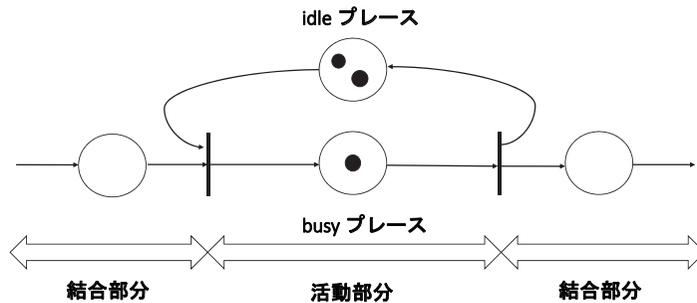
(2) では, もしトークンの定められた保持時間が過ぎた時点でトランジションが発火条件を満たさないならば, さらに余分な時間をプレースの中で費やすという意味がある。

簡単のため, 以下ではトランジションのすべての入力プレースのトークンが発火条件を満たせばただちに発火し, トークンの移動が瞬間的に行われると仮定する。

時間付きイベントグラフの特殊な場合として業務取引ペトリネットが挙げられる ([Sa2])。

**定義55.** 時間付きイベントグラフが以下のすべての条件をみたすとき, 与えられたペトリネットを業務取引ペトリネットとよぶ。

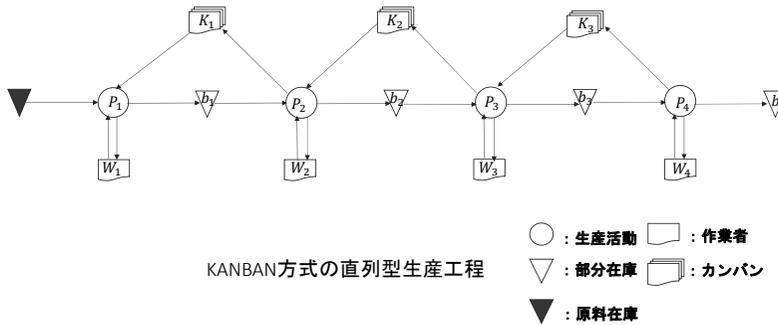
- (1)  $|\rightarrow \bigcirc \rightarrow|$  という2つのトランジションと一つのプレースから成る部分を活動部分とい  
い、中のプレースをbusyプレースとよぶ。活動部分のアークの重みは1とする。
- (2)  $\rightarrow \bigcirc \rightarrow$  からなる。活動部分以外の部分を結合部分という。各アークの重みは1以上で  
あり、活動部分に対してはbusyプレースのアークと逆向きのアークによって接続された  
結合プレースがある。このプレースはidleプレースとよばれる。
- (3) 活動部分への入力アークは入力トランジションからのみ入り、逆に活動部分からの出力  
アークは出力トランジションからのみ出ていく。
- (4) ペトリネットグラフの任意のパスにおいて、活動部分と結合部分は交互に現われる。
- (5) busyプレースのトークン保持時間は正の実数、また結合プレースのトークン保持時間は  
0で与えられる。



業務取引ペトリネットの例

下の図はKANBAN方式による組み立て工程の一部をデータフローダイアグラムで描いた上  
でペトリネットに直した例になる。

例24.



KANBAN方式の直列型生産工程

#### 4.2 業務取引ペトリネットの行列表示

定義56. あるノードから出発し、同じノードで終わるパスをサーキットという。特に最初と最  
後のノードが同じである以外、すべてのノードが異なるサーキットを基本サーキットとよぶ。

定義57. 業務取引ペトリネットにおいて、各サーキットごとのトークン一つあたりの保持時間

をサイクル平均値という。すべてのサーキットにおけるサイクル平均値の最大値を最大サイクル平均値とよぶ。最大サイクル平均値をもつサーキットをクリティカルサーキットという。

**定義58.** グラフ上の任意の2つのノードの間にパスが存在するとき、グラフは強連結であるという。

したがって、強連結である場合には、どのトランジションもいずれかのサーキットに属する。以下の定理は重要である。

**定理59.** ([B], [Sa4]) 強連結で活性な業務取引ペトリネットは周期 $L$ をもち、その1周期のあいだにすべてのトランジションが同じ回数 $k$ だけ発火する。特にペトリネットがすでに周期状態に到達している場合には、最大サイクル平均値 $\lambda$ に対し以下の関係式が成り立つ。

$$k \otimes \lambda = L$$

すなわち、最大サイクル平均値は周期の下限値となっている。

次に業務取引ペトリネットが周期状態に入った後、トランジションの発火時刻を計算するビジネスプロセス方程式を定義するためにいくつか記号を導入する。

**定義60.**  $n$ 個のトランジション $t_1, t_2, \dots, t_n$ からなる業務取引ペトリネットに対し、 $t_i$ が $k$ 回

目に発火する時間を $x_i(k)$ とする。このときベクトル $\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix}$ を発火ベクトルとよび

$\mathbf{x}(k)$ と書く。

定理59から、強連結で活性な業務取引ペトリネットでは

$$\mathbf{x}(t+k) = k \otimes \lambda \otimes \mathbf{x}(t)$$

が成り立つことがわかる。

保持時間を表す行列は次のように定義される。

**定義61.**  $n$ 個のトランジションを持つ業務取引ペトリネットに対し、 $t_i$ を出力トランジション、 $t_j$ を入力トランジションとするプレース $p_{ij}$ の発火までの保持時間を $\alpha_{ij}$ とする。 $m$ 個のトークンを含むプレースの保持時間を表す $n$ 次正方行列 $A_m$ の $(i, j)$ 成分 $a_{ij}$ は

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij} & p_{ij} \text{の初期トークンが} m \text{個のとき} \\ \varepsilon & \text{それ以外} \end{cases}$$

により与えられる。

次の定理が成り立つ。

**定理62.** 有向グラフに付随する $n$ 次正方行列 $A$ を次のように定義する。グラフは $n$ 個のプレースをもつ、その $(i, j)$ 成分が正である場合に頂点 $i$ から頂点 $j$ へのアークが存在し、各成分の値

で重みを表す. このとき,  $A$ が既約であるための必要十分条件はグラフが強連結であることである.

したがって, ペトリネットが強連結であるならば

$$E \oplus A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \dots$$

が通常の線形代数での  $(E - A)^{-1}$ に相当するものと考えてよい. これを  $A^*$ で表す. 特に強連結かつ活性な業務取引ペトリネットの  $A_m$ がべき零であることに注意すると, プレース内におけるトークンの最大数を  $M$ として,

$$\mathbf{x}(k) = \bigoplus_{m=0}^M A_m \otimes \mathbf{x}(t) \text{ より } \mathbf{x}(k) = \bigoplus_{m=1}^M A^* \otimes A_m \mathbf{x}(k-i) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

したがって次の定理を得た.

**定理63.** ([M], [Sa4] 第4章p.83) 業務ペトリネットの  $k$ 回目の発火ベクトルを  $\mathbf{x}(k)$ ,  $m$ 個のトークンを含むプレースの時間保持行列を  $A_m$ とする.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_0^* A_1 & A_0^* A_2 & \dots & \dots & A_0^* A_M \\ E & \mathcal{E} & \dots & \dots & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & E & \ddots & \mathcal{E} & \mathcal{E} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathcal{E} & \vdots \\ \mathcal{E} & \mathcal{E} & \dots & E & \mathcal{E} \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \tilde{A} \otimes \tilde{\mathbf{x}}(k)$$

が成り立つ. ただし,  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = {}^t(\mathbf{x}(k-1) \mathbf{x}(k-2) \dots \mathbf{x}(k-M))$  ( $M$ はプレース内に含まれるトークンの最大数).

上の式を業務取引ペトリネットのビジネスプロセス方程式とよび,  $\tilde{A}$ を状態遷移行列という. 線形代数におけるマルコフ連鎖と同様の考察から, 状態遷移行列の固有値を求めることで初期状態から解を求めることが可能となることがわかる.

**命題10.** ([B]) 強連結かつ活性な業務取引ペトリネットに対し, 状態遷移行列の実固有値はただ一つ存在し, その値は与えられたペトリネットの最大平均サイクル値に等しい.

### 4.3 例題

ペトリネットの周期と最大サイクル平均値の間には関係性が存在する. 経営の効率を向上させるために最大サイクル平均値を求めたうえで, 生産工程のさらなる改善を図ることは重要である.

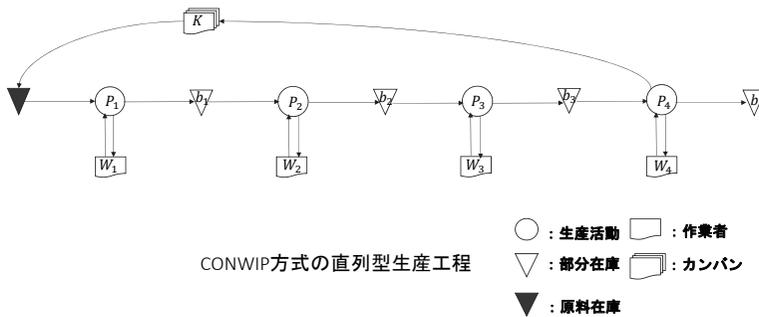
以下では佐藤らによる論文 [Sa1] 中の例題を取り扱う. まずMax-Plus代数を用いてビジネスプロセス方程式を状態遷移行列で表し, 最大平均サイクル値をその固有値として求める. 続いて次節では, 二つの生産工程の優劣を在庫量の時間平均WIP値によって比較する.

KANBAN方式とは, ジャストインタイム生産を実現するために編み出された生産システム

の一つである。使った部品や材料を後ろの工程で把握した後に前の工程にそれらを引き取りに行き、前の工程では引き取られたのと同量の部品や材料を生産し、補充を行うという特徴をもつ。

定義64. KANBAN方式の2つの工程間の生産の指示に用いられる情報伝達システムを製造指示カンバンとよび、工場あるいは企業間の納入の指示に用いられる情報伝達システムを外注カンバンとよぶ。

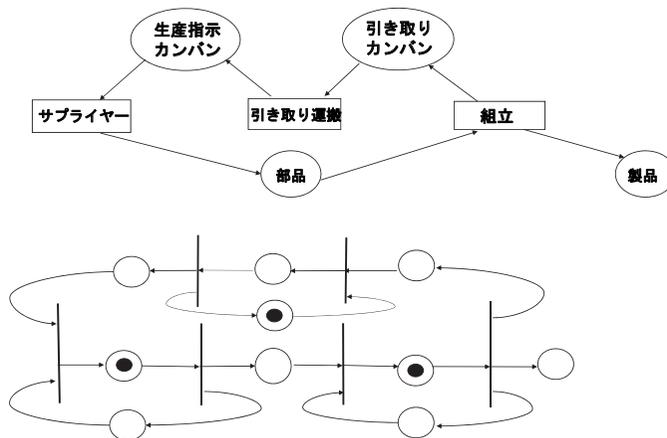
これらのカンバンは処理がなされたのちに外されてなくなり、また新たなカンバンによる指示が出されるものとする。



ここで  $P_1, P_2, P_3, P_4$  は生産活動を、 $W_1, W_2, W_3, W_4$  は作業者を、 $K_1, K_2, K_3, K$  は指示カンバンを、 $b_1, b_2, b_3, b_4$  は部品在庫を表す。また、原料在庫は豊富にあるものとする。

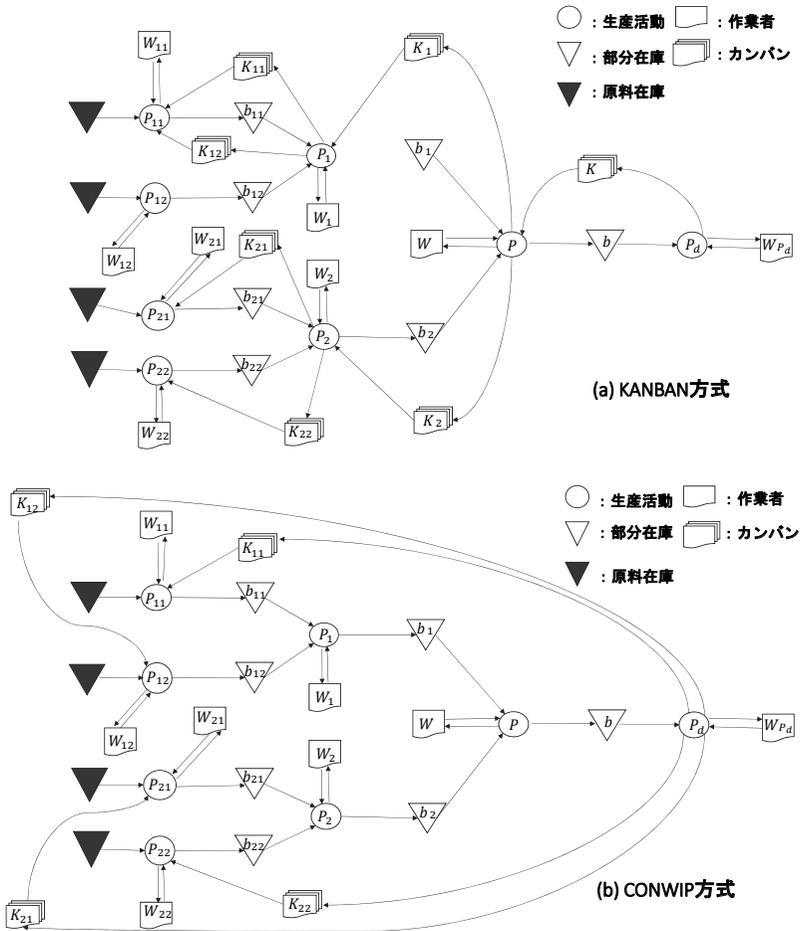
KANBAN方式は過剰な生産や運搬を防ぎ、在庫を削減するという点が優れている。しかしその一方で、需要が起きた場合には、部品の供給や運搬などの情報がすべて揃った後で前の工程に生産指示が出されるため、指示の遅延が起こる可能性があるという欠点もある。この欠点を補うために考え出されたのがCONWIP方式である ([S])。

CONWIP方式はKANBAN方式とは異なり、需要が在庫によって満たされるごとに一番最初の工程に生産指示が出て、以降の工程が順に次の生産を行うという特徴がある。

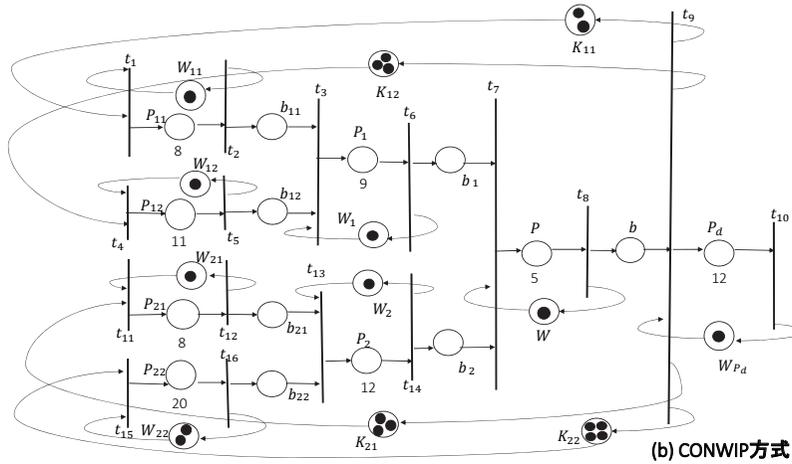
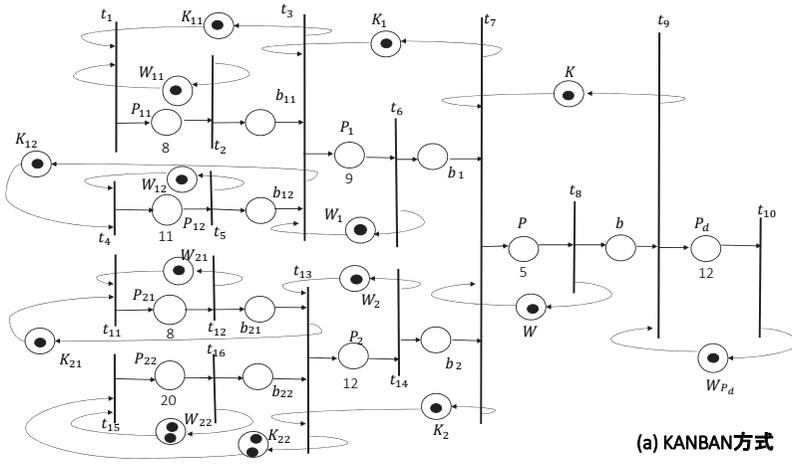


KANBAN方式とCONWIP方式の比較は様々な設定において比較検討が行われてきた。特に直列式の生産工程では使用されるカンバンの枚数が等しければCONWIP方式がKANBAN方式よりも優れているという結果が得られている ([S])。ここで優れているとは、後で述べるように少ない仕掛け在庫 (WIP) によって一定の平均生産速度が得られることをいう。

例25. 図6で与えられた (a) KANBAN方式と (b) CONWIP方式の2つの強連結な樹形型生産工程を考える。図中の記号は直列の場合と同様とする。共通の設定として各プレス  $P_{ij}$ ,  $P_i$ ,  $P$ ,  $P_d$  の保持時間をそれぞれ  $h_{11} = 8$ ,  $h_{12} = 11$ ,  $h_{21} = 8$ ,  $h_{22} = 20$ ,  $h_1 = 9$ ,  $h_2 = 12$ ,  $h = 5$ ,  $h_d = 12$  とし, 各プレス  $W_*$  における作業者の数  $w_*$  を  $W_{22}$  は2名でそれ以外はすべて1名とする。また, KANBAN方式のカンバンの数を  $|K_{22}| = 2$  でそれ以外はすべて1枚とし, CONWIP方式のカンバンの数をそれぞれ  $|C_1| = 2$ ,  $|C_2| = 3$ ,  $|C_3| = 3$ ,  $|C_4| = 4$  とおく。



これをペトリネットに直したものが図7である。



各トランジションの  $k$  回目の発火時刻はそのトランジションと連結している他のトランジションたちの発火が影響する。すでに周期的に定常状態にあるという仮定の下でこの条件を式に直し、状態遷移行列を求めた上で、それぞれの行列の固有値から周期を求める。









と書ける. この固有値を計算すると12となり, 1周期に発火は1回ずつ発生することから周期も12に等しくなる. クリティカルサーキットは  $P_{21}W_{21}P_{21}$ .

#### 4.4 時間平均WIPの比較

定義65. 出荷スピードが一定かつ連続的であるときの在庫量の時間平均WIP (*work-in-process*) を

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt = \frac{1}{L} \int_0^L w(t) dt$$

により近似的に定める. ただし  $w(t)$  は時刻  $t$  における在庫量.

つまり時間平均WIPとは各生産活動における, 活動前および活動中の部品在庫量の合計の時間平均値を指す. 以下では例題のKANBAN方式の時間平均WIPを  $W_K$ , CONWIP方式の時間平均WIPを  $W_C$  で表し, これらを別々の計算方法で求める.

定義66. あるサーキットに対し, そのサーキット内の任意のプレースから出発したトークンが再び同じプレースに戻ってくるまでの最小所要時間をサイクルタイム ( $CT$ ) という.

定義67. (リトルの公式, [Sa4]). 強連結で活性な周期  $L$  の業務取引ペトリネットが周期的定常状態で, 一周期における各活動の発火回数は1回ずつとする. また一つのトークンをもつクリティカルサーキットが存在するとき, ペトリネット内の任意のサーキット内のトークンの数を  $W$  とすると次が成り立つ.

$$W = \frac{CT}{L}$$

注6. 今の例のスループット (1単位当たりの生産速度) は  $\frac{1}{L}$  で与えられている ([Sa1]). すなわち (時間平均WIP) = (平均サイクルタイム)  $\times$  (平均スループット)

例題のKANBAN方式とCONWIP方式はともに上の定理の仮定をすべて満たしているので, サークットごとにリトルの公式が成立している.

[KANBAN方式]

プレースを活動部分と結合部分に分け, それぞれ

$$A = \{P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, P_1, P_2, P\},$$

$$Q = \{b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, b_1, b_2, b, K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}, K_1, K_2, K\}$$

とおく. また活動サーキット  $K_*P_*b_*K_*$  を  $\bar{C}_*$  のように略記し,  $\mathcal{A}(\bar{C}_*)$  でサーキット  $\bar{C}_*$  上の活動プレースの集合を指すものとする.  $\mathcal{Q}(\bar{C}_*)$  も同様に定める.

各サーキット  $\bar{C}_*$  ごとのトークンの数の積分値は

リトルの公式より,

$$\sum_{q \in \mathcal{Q}(\tilde{C}_*)} h_q = 12 \times |K_*| - h_*.$$

よって

$$\begin{aligned} \sum_{q \in \mathcal{Q}} h_q &= \sum_{q \in \mathcal{Q}(\tilde{C}_{11})} h_q + \sum_{q \in \mathcal{Q}(\tilde{C}_{12})} h_q + \sum_{q \in \mathcal{Q}(\tilde{C}_{21})} h_q + \sum_{q \in \mathcal{Q}(\tilde{C}_{22})} h_q + \sum_{q \in \mathcal{Q}(\tilde{C}_1)} h_q + \sum_{q \in \mathcal{Q}(\tilde{C}_2)} h_q + \sum_{q \in \mathcal{Q}(\tilde{C})} h_q \\ &= 12 - h_{11} + 12 - h_{12} + 12 - h_{21} + 12 \times 2 - h_{22} + 12 - h_1 + 12 - h_2 + 12 - h \\ &= 8 \times 12 - 73 = 23. \end{aligned}$$

活動プレス  $P_*$  に従事する作業者の数  $w_*$  に対する積分値は次の総和で求められる,

$$w = \sum (12w_* - h_*) = 12 \times 9 - 73 = 35.$$

以上をまとめて

$$W_K = \frac{1}{12} \left( \sum_{a \in \mathcal{A}} h_a + \sum_{q \in \mathcal{Q}} h_q + w \right) = \frac{1}{12} (73 + 23 + 35) = \frac{131}{12} = 10.92$$

がKANBAN方式における時間平均WIPとなる.

[CONWIP]

CONWIP方式では、最大サーキットたちの共通部分にあたるプレート上のトークンの個数の計算が煩雑になる. このため、各プレスにおけるトークンを表にしたものを作り、全体として計算する.

十分に時間  $t$  が経ち、周期的定常状態となった後の状態遷移表は以下のとおりである. 表中の数字は各プレス上のトークンの数を表し、 $1(a)$  で一つのトークンがあと  $a$  単位時間後に発火可能になることを示す. 活動プレス  $P_{22}$  は作業者が2名いるため、トークンの数は2つであることに注意する.

表 1 : CONWIP方式の状態遷移表 [Sa1, Table 2]

時間	$C_1$	$P_{11}$	$b_{11}$	$C_2$	$P_{12}$	$b_{12}$	$P_1$	$b_1$	$C_3$	$P_{21}$	$b_{21}$	$C_4$	$P_{22}$	$b_{22}$	$P_2$	$b_2$	$P$	$b$	$P_d$
t	0	1(8)	0	0	1(11)	1	1(5)	0	0	1(8)	1	0	1(8), 1(20)	1	1(7)	0	—	0	1(7)
t+5	0	1(3)	0	0	1(6)	1	—	1	0	1(3)	1	0	1(3), 1(15)	1	1(2)	0	—	0	1(7)
t+7	0	1(1)	0	0	1(4)	1	—	0	0	1(1)	0	0	1(1), 1(13)	0	1(12)	0	1(5)	0	1(5)
t+8	0	—	0	0	1(3)	0	1(9)	0	0	—	1	0	—, 1(12)	1	1(11)	0	1(4)	0	1(4)
t+11	0	—	0	0	—	1	1(6)	0	0	—	1	0	—, 1(9)	1	1(8)	0	1(1)	0	1(1)
t+12	0	1(8)	0	0	1(11)	1	1(5)	0	0	1(8)	1	0	1(20), 1(8)	1	1(7)	0	—	0	1(12)

$W_C$  を活動部分の寄与からなる  $W_a^C$  と結合部分の寄与からなる  $W_q^C$  の和  $W_a^C + \frac{1}{L} W_q^C$  に分けて考える.  $W_a^C$  は活動部分のプレス数8と、余分にいる作業者数1の和9で与えられ、 $W_q^C$  は表1から周期12の間の部品在庫およびカンバンすべてにおけるトークンの数に保持時間を掛けたものの総和として計算できる.

$$W_q^C = 1 \times (5 + 2 + 1 + 1) + 1 \times 2 + 1 \times (5 + 2 + 3 + 1) + 1 \times (5 + 2 + 3 + 1) = 33$$

したがって  $W_C = 9 + \frac{33}{12} = 11.75$  が CONWIP 方式の時間平均 WIP となる。

以上により与えられた条件を満たす図 6 (a) の KANBAN 方式が (b) の CONWIP 方式よりも仕掛け在庫量の観点から優れた生産工程であることが示された。

なお本論文で取り扱った例は, [Sa1] の主定理

**定理68.** 図 6 の CONWIP 方式と KANBAN 方式の樹形型生産工程を考える. それぞれに与えられた作業数, 発火頻度およびスループット数が等しいとする.

CONWIP 方式で用いられるカンバンの数を  $N$  とし, KANBAN 方式で用いられるカンバンの総数を  $K$  とする.  $\lambda$  で最大平均サイクル値を,  $h_i$ ,  $h$  で各  $P_i$ ,  $P$  それぞれの工程所要時間を表す. このとき,

$$(1) \quad N - K \leq \frac{h_1 + h_2 + 3h_3}{\lambda} \text{ ならば } W_C \leq W_K,$$

$$(2) \quad N = K \text{ ならば } W_C < W_K$$

が成り立つ. ただし,  $W_C$ ,  $W_K$  はそれぞれの平均システム WIP.

の (1) の条件を満たさないものとして紹介されたものである.

## 5. おわりに

定理68 (1) の仮定はより弱いものに置き換えられることが期待される. また本論文での状態遷移行列の固有値の計算は手計算で行ったが, プログラムを組んで計算する方法を考慮する必要がある. 以上を今後の課題としたい.

すでに述べたように, ある種のペトリネットにおいては得られる状態遷移行列の実固有値はただ一つ存在する. その一方で複素数体上まで広げて考えた場合には他にも固有値は存在し, 興味深い問題となる. これに対し小田切らにより新たな幾何学的解釈がなされた ([O]). 経営工学の視点からもこの結果に対する解釈を試みる必要があるだろう.

また, Max-Plus 代数の特徴として引き算が存在しないため, 線形代数では可能であった掃き出し法がトロピカル半体上では使えないという大きな欠点もあった. 本年伊藤によりトロピカルイデアルが定義付けられ, 方程式の左辺および右辺にある同じ次数の項を「削除する」という操作への意味付けが行われた結果, 「Max-Plus 線形空間論」への新たな扉が開かれた. 余因子展開定理に相当する Max-Plus 代数計算など残された課題も多い.

経営学における Max-Plus 代数の意義は今後ますます深まるものと期待できる. 本学の「経営

数学」の授業でも取り扱いたいと考えている。

### 参 考 文 献

- [A] H. アントン, 『やさしい線形代数の応用』, 現代教学社, 1979.
- [B] F. Baccelli, G. J. Olsder, J. P. Quadrat, *Synchronization and Linearity*, John Wiley and Son, 1992.
- [H] B. Heidergott, G. J. Olsder, J. Van Der Woude, *Max Plus at Work: Modeling And Analysis of Synchronized Systems: a Course on Max-Plus Algebra And Its Applications*, Princeton University Press, 2005.
- [I] T. Ito, *A characterization for tropical polynomials being the minimum finishing time of projective networks*, Hokkaido Math. J., in Press.
- [M] 村田忠雄, 『ペトリネットの解析と応用』, 近代科学社, 1998.
- [N] 中村郁, 『線形代数学』, 数学書房, 2007.
- [O] 小田切真輔, 佐藤宏平, in preparation.
- [S] M. Spearman, D. Woodruff and W. Hopp, CONWIP: a pull alternative to kanban, *Int. J. of Production Research* 28, pp 879-894, 1990.
- [Sa1] R. Sato, Y. Khojasteh-Ghamari, An framework for card-based production control systems, *Journal of Intelligent Manufacturing*, 23-3, pp 717-731, 2012.
- [Sa2] 佐藤亮, ビジネスプロセスのDFDモデルとペトリネットモデル, 『経営情報学会誌』, 8-1, pp1-15, 1999.
- [Sa3] 佐藤亮, ビジネスプロセスの制御システムについて, 『経営情報学会誌』, 8-1, pp17-28, 1999.
- [Sa4] R. Sato, A. Kawai, Organizing a business process that realizes required throughput: the principle and an application to information systems for SCM, *Dep. of Social Systems and Management, Discussion Paper Series*, No.1184, University of Tsukuba, 2007.
- [Sc] B. De Schutter, B. De Moor, A note on the characteristic equation in the max-plus algebra, *Linear Algebra and its Applications*, Vol.26 1-3, pp 237-250, 1997.
- [Su] 鈴木香織, 『線形代数』, ライブラリ数学コア・テキスト1, サイエンス社, 2010.

[すずき かおり 横浜国立大学大学院国際社会科学研究院准教授]

[2017年11月20日受理]