論　説

Fano指数が６よりも大きい３次元Fano多様体のGorenstein指数について

鈴　木　香　織

１．はじめに

以下すべて複素数体$\mathbb{C}$上で考える．

Fano多様体（古典的な言い方では$\mathbb{Q}$-Fano多様体）に付随する不変量はさまざまであるが，分類上特に重要なものとして，Gorenstein指数およびFano指数が挙げられる．

この中で3次元Fano多様体のFano指数についてはすでに[Su], [PR]で解決を見た．その際に得られた分類データは，以前から存在したAltinock, FletcherらのFano指数1での分類結果（[ABR], [IF]）とともに[BS2]に収められ，52646という膨大な数となっている．このため，本論文では対象をFano指数が6以上の3次元Fano多様体に絞った上で，それらのGorenstein指数について考察する．

1996年に，Shafarevichはその著書である「Encyclopedia of Mathematical Sciences vol.47 Algebraic Geometry V」において，Fano多様体の分類に関するいくつかの興味深い未解決問題を提示している（第11章4節，[IP]）．この中で，特にピカール数が1の場合の3次元Fano多様体のdeformationの分類の完了の鍵として，Gorenstein指数が有限であるという結果が紹介され，更なる問題としてその具体的な上限値が問われた．

本論文は，Gorenstein指数の値を定義に従って具体的に計算し，個々の結果を比較することで上記未解決問題の部分的な解決を与えることに成功している．

２．Fano多様体の定義と特徴

定義１． *Fano*多様体とは，ピカール数が1の正規射影的代数多様体であって，高々*terminal*な特異点のみをもち，*anti-canonical divisor* $-K_X$が*ample*かつ$\mathbb{Q}$−*factorial*という条件を満たすものをいう．

尚，[R]により，定義におけるterminalな特異点はcyclic quotient特異点のbasket$\{1/a_k(f, a_k, a_k-b_k)\}$として記述可能であることが示されている．

Gorenstein指数$r(X)$とは，Xのanti-canonical divisor $-K_X$を何倍すればCartier divisorにな

2012 *Mathematics subject classification.* Primary 14J45 ; Secondary 14J30, 14Q15 *Key words and Phrases.* Fano 3-fold, Fano index, Gorenstein index, graded ring

るかを与えるもののうちで最小の正の整数である．

定義２．

$$r(X)=\min\{m\in\mathbb{Z}_{>0}\mid -mK_X: Cartier\ divisor\}$$

またFano指数$f(X)$は，$-K_X$がXのWeil divisor全体のなす群を数値的同値類で割って得られる群の中で，どれだけ割れるかをあらわすもののうち最大の整数である．

定義３．

$$f(X)=\max\{n\in\mathbb{Z}_{>0}\mid -K_X\equiv nA_X\quad A_X: Weil\ divisor\}$$

注１． $1\leq f(X)\leq 19$([Su1])

ここで，各Fano指数$f(X)$に対して$-K_X\equiv f(X)A_X$であり，Weil divisor A_X（primitive Weil divisorとも呼ばれる）は数値的同値を除いてただ一通りに定まることに注意する．

定義４． *Fano*多様体Xに対し，Xの0次コホモロジーたちの次元$\dim H^0(X,\theta_X(nA))$をn次の項の係数としてもつような多項式を，Xの*Hilbert*多項式とよぶ．また，

$$Proj(\oplus_{n\geq 0}H^0(X,\theta_X(nA)))$$

をXの*Hilbert*多項式環または次数環とよぶ．Fano多様体とそのHilbert多項式環は一対一に対応している．

これらの準備のもとで以下の手順に従い，3次元Fano多様体から自身と同一視できる多項式環を求め（[Su1], [Su2]），Gorenstein指数を計算した．

Step.1　特異点のbasketの候補として取り得る値を1つ固定し，$\frac{1}{12}AC_2$や$-K_X^3$などの不変量を具体的に計算する．更に，得られた情報をもとにReiman-Rochの公式（[R], [Su1]）からHilbert多項式を決定する．

Step.2　$-K_X^3$の正値条件を確かめる．

Step.3　Hilbert多項式の係数についての条件（川又-Viewegの消滅定理）を満たすものであることを確かめる．

Step.4　$-K_X^3$と$\frac{1}{12}AC_2$について，川又の条件式（[K], [Su1]）を満たすものであることを確かめる．

Step.5　*Step.4*までに得られたHilbert多項式に対してHilbert多項式環を構成し，最終的に以下の数の3次元Fano多様体が存在することが示せた．

Fano指数	6	7	8	9	11	13	17	19
Fano多様体の個数	11	23	10	2	3	2	1	1

3．主結果

定義2に従ってGorenstein指数を求め，得られた結果は次の通りである．

定理5（主定理）**.** Xを*Fano*指数が$f(X)$であるような3次元*Fano*多様体とする．
このとき以下が成り立つ．

(1) $f(X)=6$のとき$r(X)\in\{5,7,35,57,77,85,91\}$,
(2) $f(X)=7$のとき$r(X)\in\{6,8,9,10,12,18,24,30,36,40,60,72,78,90\}$,
(3) $f(X)=8$のとき$r(X)\in\{9,11,15,21,35,77,91,135,165\}$,
(4) $f(X)=9$のとき$r(X)\in\{20,70\}$,
(5) $f(X)=11$のとき$r(X)\in\{30,70,84\}$,
(6) $f(X)=13$のとき$r(X)\in\{60,210\}$,
(7) $f(X)=17$のとき$r(X)\in\{210\}$,
(8) $f(X)=19$のとき$r(X)\in\{420\}$.

4．Gorenstein指数の表

Fano指数が6以上の場合のGorenstein指数について，2で得られた上限値と対応する3次元Fano多様体の幾何的構造，および付随する不変量の値をまとめたのが次頁の表である．ただし，Fano指数が9以上では対象となる3次元Fano多様体の個数が少ないため，取りうるすべての場合について提示している．

$f(X)$	$\max r(X)$	X	basket	A^3	$Ac_2/12$
6	91	$X\subset\mathbb{P}(2^2,3^3,4^3,5^2,6,7^2,9,11,13)$	$\frac{1}{7}(3,4,6),\ \frac{1}{13}(2,6,11)$	10/91	16/273
7	90	$X\subset\mathbb{P}(1,2,3^2,4^2,5^2,6,7,8,9)$	$\frac{1}{2}(1,1,1),\ \frac{1}{3}(1,1,2),\ \frac{1}{5}(1,2,4),\ \frac{1}{9}(1,7,8)$	11/90	79/1080
7	90	$X\subset\mathbb{P}(1,2^2,3^2,4,5^2,6,7,8,9)$	$2\times\frac{1}{2}(1,1,1),\ \frac{1}{5}(2,2,3),\ \frac{1}{9}(1,7,8)$	7/45	47/540
8	165	$X\subset\mathbb{P}(2,3,4,5^2,6,7,8,9,11)$	$\frac{1}{3}(1,2,2),\ \frac{1}{5}(1,3,4),\ \frac{1}{11}(2,8,9)$	4/165	29/495
8	165	$X\subset\mathbb{P}(1,2,3^2,4,5^2,6,7,8,9,10,11)$	$\frac{1}{3}(1,2,2),\ \frac{1}{5}(2,3,3),\ \frac{1}{11}(1,8,10)$	16/165	29/495
$f(X)$	$r(X)$	X	basket	A^3	$Ac_2/12$
9	70	$X_{12}\subset\mathbb{P}(2,3,4,5,7)$	$3\times\frac{1}{2}(1,1,1),\ \frac{1}{5}(2,3,4),\ \frac{1}{7}(2,3,4)$	1/70	61/840
9	20	$X_6\subset\mathbb{P}(1,2,3,4,5)$	$\frac{1}{2}(1,1,1),\ \frac{1}{4}(1,1,3),\ \frac{1}{5}(2,3,4)$	1/20	31/240
11	84	$X_{10}\subset\mathbb{P}(2,3,4,5,7)$	$2\times\frac{1}{2}(1,1,1),\frac{1}{3}(1,2,2),\frac{1}{4}(1,3,3),\frac{1}{7}(2,4,5)$	1/84	59/1005
11	70	$X_{12}\subset\mathbb{P}(1,4,5,6,7)$	$\frac{1}{2}(1,1,1),\ \frac{1}{5}(1,1,4),\ \frac{1}{7}(1,4,6)$	1/70	23/280
11	30	$\mathbb{P}(1,2,3,5)$	$\frac{1}{2}(1,1,1),\ \frac{1}{3}(1,2,2),\ \frac{1}{5}(1,2,3)$	1/30	41/360
13	210	$X_{12}\subset\mathbb{P}(3,4,5,6,7)$	$\frac{1}{2}(1,1,1),2\times\frac{1}{3}(1,1,2),\frac{1}{5}(1,3,4),\frac{1}{7}(3,4,6)$	1/210	89/2520
13	60	$\mathbb{P}(1,3,4,5)$	$\frac{1}{3}(1,1,2),\ \frac{1}{4}(1,1,3),\ \frac{1}{5}(1,3,4)$	1/60	59/720
17	210	$\mathbb{P}(2,3,5,7)$	$\frac{1}{2}(1,1,1),\ \frac{1}{3}(1,2,2),\ \frac{1}{5}(2,2,3),\ \frac{1}{7}(2,3,5)$	1/210	101/2520
19	420	$\mathbb{P}(3,4,5,7)$	$\frac{1}{3}(1,1,2),\ \frac{1}{4}(1,3,3),\ \frac{1}{3}(2,3,4),\ \frac{1}{7}(3,4,5)$	1/420	131/5040

5．今後の展望

まず最初の目標として，残りのFano指数が1から5までのGorenstein指数について早急に結果をまとめたいと考えている．すべてのFano指数に対しGorenstein指数の上限値を確定することで，Shavarevichの問題の最終的な解決を図る．特にFano指数が1または2の場合には，対象となる3次元Fano多様体の数が膨大なため，整数論的手法を用いて簡略化を行うことが重要となる．

次に，Gorenstein指数が最も小さくなるような場合では，特異点から得られる情報を利用することでさまざまな応用が考えられる．特異点をもつ3次元Fano多様体のコンパクト化問題は，特異点をもたない場合と比較して格段にその困難さや複雑性が増すが，Gorenstein指数が取り得る最小の値2という条件のもとでは既にいくつかの先行研究が存在する．例えば，2002年にGorenstein指数が2であり，かつFano指数が$\frac{1}{2}$（本論文で用いたFano指数の定義では1に相当する）であるような3次元（$\mathbb{Q}$-）Fano多様体の分類が，森理論という双有理幾何的手法を用いて完了した（[T1], [T2]）．その後2005年には上の条件を満たす3次元Fano多様体のうち，Gorenstein指数が2の特異点で，重み付きblow-upをした後の2-ray gameがdivisor contractionで終了するクラスについての，3次元Affine空間のコンパクト化が研究されている．（[Ki]）

Gorenstein指数が2である3次元Fano多様体が，Fano指数が1，3または5の場合にのみ存在することはすでに確認しており，今後はそれらについてコンパクト化問題を試みるとともに，deformationの分類へとさらに結果を拡張させたいと考えている．

参　考　文　献

[ABR] S. Altınok, G. Brown, M. Reid, *Fano 3-folds, K3 surfaces and graded rings*, in Topology and geometry: commemorating SISTAG, Contemp. Math. **314** (2002), 25–53.

[BS1] G. Brown, K. Suzuki, *Computing Fano 3-folds of index* $\geq$ 3, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Volume 24, Number 3 (2007), 241–250.

[BS2] G. Brown, K. Suzuki, *Lists of examples and Magma code* available for download at http://grdb.lboro.ac.uk/forms/fano3

[CB] J. Cannon etc and W. Bosma (eds.), *Discovering Mathematics with Magma*, Springer-Verlag (2006).

[IF] A.R. Iano-Fletcher, *Working with weighted complete intersections*, in Explicit birational geometry of 3-folds (eds A. Corti, M. Reid), LMS Lecture Note Ser. **281**, CUP (2000), 101–173.

[IP] V.A. Iskovskikh, Yu.G. Prokhorov, *Fano Varieties*, Algebraic geometry V, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **47**, Springer-Verlag, Berlin, (1999), iv+247.

[K] Y. Kawamata, *Boundedness of* $\mathbb{Q}$*-Fano Threefolds*, Contemp. Math. **131** (1992), 439–445.

[Ki] Takashi Kishimoto, *Compactifications of contractible affine 3-folds into smooth Fano 3-folds with* $B_2 = 2$, Math. Zeit. **251(4)** (2005), 783–820.

[Mag] W. Bosma, J. Cannon, C. Playoust, *The Magma algebra system I: The user language*, J. Symb. Comp. **24** (1997) 235–265.

[PR] Yu.Prokhorov, M.Reid, *On* $\mathbb{Q}$*-Fano threefolds of Fano index 2*, preprint.

[R] M. Reid, *Young person's guide to canonical singularities*, in Algebraic Geometry (Bowdoin 1985), ed. S. Bloch, Proc. of Symposia in Pure Math. **46**, A.M.S. (1987), vol.1, 345–414.

[Su1] K. Suzuki, *On* $\mathbb{Q}$*-Fano 3-folds with Fano index* $\geq$ 9, Manuscripta Mathematica **114** (2004), Springer, 229–246.

[Su2] K. Suzuki, 3次元複素ファノ多様体の分類とMagmaの利用について，『横浜経営研究』**33-2** (2010), 73–81.

[T1] H. Takagi, *On classification of* $\mathbb{Q}$*-Fano 3-folds of Gorenstein index 2. I*, Nagoya Math. J., Volume 167 (2002), 117–155.

[T2] H. Takagi, *On classification of* $\mathbb{Q}$*-Fano* 3*-folds of Gorenstein index* 2. *II*, Nagoya Math. J., Volume 167 (2002), 157–216.

〔すずき　かおり　横浜国立大学大学院国際社会科学研究院准教授〕
〔2014年７月31日受理〕