論　　説

3次元複素ファノ多様体の分類とMagmaの利用について

鈴　木　香　織

1．はじめに

以下複素数体ℂ上で考える．

ある条件を満たす多様体を考える時，それ自身の性質についての研究が進められある程度の性質がわかった時点で（必要ならばさらにいくつかの仮定を加えて）取り得る全ての可能性を尽くすのが幾何学的分類理論の基本である．この分類を終わらせるためには総数が“無限個ではない”ということが前提になっている．個数有限性は通常背理法を用いて示されるが，直接的な証明ではないという点での困難さも伴う．初等的に証明できるのであればそちらの方がより良い，という考えもここから生まれてきた．方程式を解くことから出発した代数学の長い歴史の中で，特に19世紀以降に生まれたコホモロジー理論や因子の交点理論といった，いわゆる代数的手法により幾何的対象である（代数）多様体の分類を行うという流れは，極めて自然なことだと言えよう．

Fano多様体の分類理論は，1908年から1947年にかけてイタリアの数学者Fanoが切断が標準曲線となる多様体について研究を行ったことに端を発している．この中でFanoが用いた“double projection method”は，1994年のAlexeevの論文を含め，今現在でも形を変えながら用いられている重要な結果である．次いでIskovskiが1980年代になめらかな3次元Fano多様体について研究を進め，1999年に完全に分類を終わらせた．したがって，以降は特異点を持つ場合について研究が進められることとなった。1989年にはBorisov-BorisovによりToricというより幾何的な条件を付け加えた場合に分類がなされ，1996年にSanoによりFano指数が次元−2のとき，ある不等式条件のもとで一般次元のFano多様体の分類が完了した．特に3次元かつFano指数1の時にはわずか8タイプという結果が得られている．

残りの，Fano指数が1かつ不等式条件をつけない一般の場合の分類については，多くの研究結果がある．主な手法は森理論（MMP）を中心とする双有理幾何学を用いるものだが（Kollar, Miyaoka, Mori, Alexeev, Batyrev, Nikulin, Takagiなど)，ベクトルを用いた独自の手法によるもの，（Mukai)，次数付き環的手法を用いたりと（Reid, Corti, Altinok, Fletcher, Brownなど）さまざまに取り組まれてきた。Fano指数1という条件は，特にMMPを分類の手法とした

2012 *Mathematics subject classification.* Primary 14J45 ; Secondary 14Q15 *Key words and Phrases.* Fano 3-fold

場合には自然ではあるが，その分類は一般的には未解決であり，現在も活発に研究が進められている．次数環を用いた手法では指数の値に関わらずFano多様体の構造が理解できるという利点があるとともに，実際には存在しないものも数多く含むという欠点がみられる．

Fano指数が大きい場合については幾つかの具体例が，例えばBorisov-Borisovらの分類によって知られていたものの，Batyrevによって予想されたFano指数の有限性が示された段階であり，対象となる多様体の数が到底個別の計算ではできない膨大な量であることからほぼ放置されてきていた．[Su1]では実際にFano指数が19以下であることを証明しBatyrev予想を解決している．用いた手法はまず次数付き環的に取り扱いつつＭＭＰから得られる結果も利用するというもので，計算機ソフトウェアMagmaを用いることで最終的に結果を得た．

以下では[BS]，[Su1]の結果を中心になぜ計算機の利用が可能であったかと，Magmaを用いるためになされた工夫について解説し，現在得られている結果の一部[Su2]とともに今後の展望について述べる．なお，この論説を通じて定理の証明は概略に留める．

２．定義および定理

定義１． １）$\mathbb{Q}$-*factorial*な端末特異点のみを持つ　２）反標準因子 $-K_X$ が豊富　３）ピカール数Xに対し*Fano*指数fを，反標準因子がfAとなるようなXの*Weil*因子Aに対しfAが存在しうる最大の正整数として定義する．すなわち

$$f(X)=\max\{m\in\mathbb{Z}_{>0}\mid -K_X\equiv mA\quad A:Weil\text{因子}\}$$

のことである．またこの $-K_X=fA$ を満たす*Weil*因子AをXの豊富素因子と呼ぶ．

注１． 定義における条件１）の特異点は*cyclic*な商特異点$\{1/r_k(f,\ r_k,\ r_k-a_k)\}$の組として記述可能である．([R])

以下f固定の状態でXは特異点の組$\mathcal{B}=\{1/r_k(f,\ r_k,\ r_k-a_k)\}$を持つとし，$\{[r_k,\ a_k]\}$と省略して書くこととする．また簡単のため，$f>2$の場合のみを取り扱うものとする．

豊富素因子Aに対しては次の公式が成り立つことが知られている．([K])

$$\frac{1}{12}A.c_2(X)=\frac{1}{f}\left\{2-\frac{1}{12}\sum_k\left(r_k-\frac{1}{r_k}\right)\right\}$$

この公式と他の結果を併せることにより$\sum_k\left(r_k-\frac{1}{r_k}\right)<24$，$k\leq 15$などが示され，$X$の特異点の組が個数有限であることが確かめられる．

定義２． 豊富素因子Aをもつ３次元*Fano*多様体Xに対し，

$$R(X,\ A)=\bigoplus_{n\geq 0}H^0(X,\ \mathcal{O}_X(nA))$$

をXの次数環と呼ぶ．

今の場合に実際には直和は有限であることに注意する．

このとき，$X=\operatorname{Proj}R(X,\ A)$が成り立つ．逆に多様体から次数環を得るにはコホモロジー

の計算をすれば良く，対応は1対1である．したがって，Fano多様体について分類するには次数環を分類すれば良いことが分かる．この次数環の構造はHilbert多項式により記述されるが，その記述に必要な幾つかの記号の定義を以下に行う．

定義3． Aに対する局所指数$i_{k,1}$とは，以下の式により一意に定まる整数$i_{k,1}\in[0,\ r_k-1]$をいう．

$$-fi_{k,1}\equiv 1\, mod\, r_k,$$

同様にnAに対する局所指数$i_{k,n}$を$i_{k,1}$を用いて次で定義する．

$$i_{k,n}\equiv ni_{k,1} \bmod r_k \qquad 0\leq i_{k,n}\leq r_k-1.$$

この局所指数$i_{k,n}$を用いて各$P\in\mathcal{B}$に対し次のようにcontribution part $c_P(t)$を定義する．

定義4．

$$c_P(t)\ :=\frac{1}{1-t^r}\left\{\sum_{k=1}^{r-1}\left(-i_{k,-1}\frac{r^2-1}{12r}+\sum_{j=1}^{i_{k,-1}-1}\frac{\overline{b_kj}(r-\overline{b_kj})}{2r_k}\right)t_k\right\}.$$

ただし$b_k\in[0,\ r_k-1]$は$a_kb\equiv 1\, mod\, r_k$を満たす整数．また，$\overline{b_kj}\in[0,\ r_k-1]$は$\overline{b_kj}\equiv b_kj\, mod\, r_k$を満たす整数である．

以上の準備のもとで，一般化されたsingular Reiman-Rochの定理により，Hilbert多項式$P(X,\ t):=\sum_{n\geq 0}\dim h^0(X,\ \mathcal{O}(-nA))t^n$を特異点の組$\mathcal{B}$の情報のみによって具体的に記述することが可能になった．

定義5．（[Su1] Theorem 1.4）

$$P(X,\ t)=\frac{1}{1-t}+\frac{(f^2+3f+2)t+(-2f^2+8)t^2+(f^2-3f+3)t^3}{12(1-t)^4}A^3 +\frac{t}{(1-t)^2}\frac{A.c_2(X)}{12}+\sum_{P\in\mathcal{B}}c_P(t).$$

系1．

$$A^3=\frac{12}{(f-1)(f-2)} \left\{1-\frac{1}{12}A.c_2(X)+\sum_{k=1}^{m}\left(-i_{k,-1}\frac{r_k^2-1}{12r_k}+\sum_{j=1}^{i_{k,-1}-1}\frac{\overline{b_kj}(2r_k-\overline{b_kj})}{r_k}\right)\right\}>0.$$

Batyrev予想の解決は次の定理によってなされた．

定理6．（[Su1] Theorem 0.3）Xを*Fano*指数が$f(X)$であるような3次元*Fano*多様体とする．このとき

$$f(X)\in\{1,\ 2,\ \ldots,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 17,\ 19\}.$$

Fano指数が10の場合を除いては実際に存在する例を具体的に構成することができることも示

した．10の場合には唯一の特異点の組の候補があり，Mirageという性質を持つことからその非存在性が期待されていた．近年Prokhrovらにより指数10の3次元Fano多様体はtoricという性質を持たなくてはならないとする結果が出され，上の結果と併せて存在が否定的に解決された([PR])．これによりFano指数に関する最終結果が得られたことになる．

3．分類におけるMagmaの利用

定理6の証明の概略について述べる前に，Magmaについて短く触れておく．

2000年代後半における個人用のパソコンの性能（WindowsXP，ペンティアムプロセッサ）は現在のそれとは比較にならないほど低いものであった．例えば，fが2の場合の$\mathcal{B}$の取りうる全ての可能性の数は3000足らずだが，この程度を対象とした計算であってもMathematicaを用いた場合には（メモリ不足もあり）フリーズしたまま動かない，というのが通常であった．これを解決したのが1993年にJ.Canonおよびオーストラリアのシドニー大学関係のグループを中心に開発された計算機ソフトウェア，Magmaである．元々のメンバーの数学的専門分野を反映して主に代数学の研究に関して広く利用されることが多い．例えば，楕円曲線を用いる暗号符号理論において重要な役割を果たし，多用されている．特に最近では，多項式環のイデアルに関する問題の解に使われるグレブナー基底の計算ソフトとして利用され，公開鍵暗号の暗号解析にも用いられている．数論，代数幾何，群論をはじめとする代数計算はもとより，物理学，経済学を含む他の広い分野での活用が今後期待されている．

次数環的手法を用いる時の良い点としてはまず1）解析が使える，2）自分の欲しい数がある範囲に確実に存在することがわかる（今の場合にはFano指数fとそれに付随する特異点の組$\mathcal{B}$のデータ），したがって3）2）のデータを何らかの方法で取り出すというステップに数式処理を用いることが可能になることが挙げられるが，定理6の証明における3）は，以下の4つの条件を満たす$\mathcal{B}$が各Fano指数に存在するかどうかを確かめることで得られる．

条件1（特異点の条件）

$$\sum_{k=1}^{m}\left(r_k-\frac{1}{r_k}\right)<24(r_k,\ a_k)=1,\ (f,\ r_k)=1.$$

条件2（系1）

$$A^3>0.$$

条件3（川又-Viewegの消滅定理）

$$n=-1,\ -2,\ \cdots,\ -(f-1)\text{に対し，}\dim h^0(X,\ \mathcal{O}(-nA))=0.$$

条件4（川又条件 [K], [Su1]）

$$(4f^2-3f)A^3\le 4(-K_X.c_2(X)).$$

条件４は元来 $-K_X^3 \leq k(-K_X.c_2(X))$ となる実数kが存在するという定理だったが，具体的にkの値を定めることで計算機のプログラムに組み込むことが可能になり，特にfが大きな値の時に$\mathcal{B}$の数を急激に0に収束させる大きな役割を果たしている．

次に，第２節で定義した幾つかの記号について，その部分のMagmaのプログラム（(i)～(iv)，[Su1]）を見る．

(i) $1/12AC_2$

```
function Ac2over12_is(f,B)
    sumpart := &+[ Rationals() | (r^2-1)/(12*r) where r is p[1] : p in B ];
    return (2-sumpart)/f;
end function;
```

(ii) A^3（Fano指数が２の場合には別の工夫が必要になっている）

```
function A3_is(f,B)
        factor := 12/((f-1)*(f-2));
        c2_part := Ac2over12_is(f,B);
        periodic := &+[ Rationals() | contribution(f,r,a,-1)
                                 where a is p[2]
                                 where r is p[1] : p in B ];
        return factor * (1 - c2_part + periodic);
end function;
```

(iii) $\dim h^0(X, \mathcal{O}(-nA))$

```
intrinsic FanoCoefficient(f::RngIntElt,B::SeqEnum,n::RngIntElt)
        -> RngElt
    V := 1+1/12*A3_is(f,B)*n*(n+f)*(2n+f)+n*Ac2over12_is(f,B)+
         &+[Rationals()| contribution(f,r,a,n) where a is p[2]
    vprintf User1: "\tP_(%o) = %o\n",n,V;
    return V;
end intrinsic;
```

(iv) Hilbert多項式

```
intrinsic FanoHilbertSeries(f::RngIntElt,B::SeqEnum) -> RngElt
{The Hilbert series of a Fano 3-fold of Fano index f and basket B}
    K := RationalFunctionField(Rationals());
    t := K.1;
```

```
    I := 1/(1-t);
    II := 1/12 * A3_is(f,B) *
        ((f^2 + 3*f + 2)*t + (-2*f^2 + 8)*t^2 + (f^2 - 3*f + 2)*t^3) /(1-t)^4;
    III := Ac2over12_is(f,B) * t/(1-t)^2;
    IV := &+[ Parent(t) |
        &+[ Parent(t) | contribution(f,r,a,n)*t^n : n in [1..r-1] ] / (1-t^r)
                                where r is p[1]
                                where a is p[2] : p in B ];
    return I + II + III + IV;
end intrinsic;
```

この他次の数値についても計算を行っている

(*v*) Weights

```
intrinsic FanoWeights(g::FldFunRatUElt) -> SeqEnum,RngIntElt
{}
    N := 20;
    gens,i := FanoWeights(g,N);
    return gens,i;
end intrinsic;

intrinsic FanoWeights(g::FldFunRatUElt,N::RngIntElt)
    gens := [ Integers() | ];
    S := PowerSeriesRing(Rationals(),N);
    coeffs := Coefficients( S ! g )[2..N];
    new := [ Rationals() | 0 : i in [2..N] ];
    dif := [ coeffs[j] - new[j] : j in [1..N-1] ];
    i := 1;

    while dif[i] ge 0 do
      if dif[i] eq 0 then
              i +:=1;
              continue;
      end if;
      d :=Integers() ! dif[i];
      gens cat:=[i :j in [1..d]];
      new :=[#MonomialsOfWeightedDegree(PolynomialRing(Rationals(),gens),j)
                                                :  j in [1..N-1]];
        dif := [ coeffs[j] - new[j] : j in [1..N-1] ];
```

```
        i +:= 1;
    end while;

    vprintf User1: "\tadding %o generators of degree %o\n",d,i;
    return gens,i;
end intrinsic;
```

以下Magmaを利用して得られるデータからのFano多様体の再構成の方法を具体例を用いて説明する.

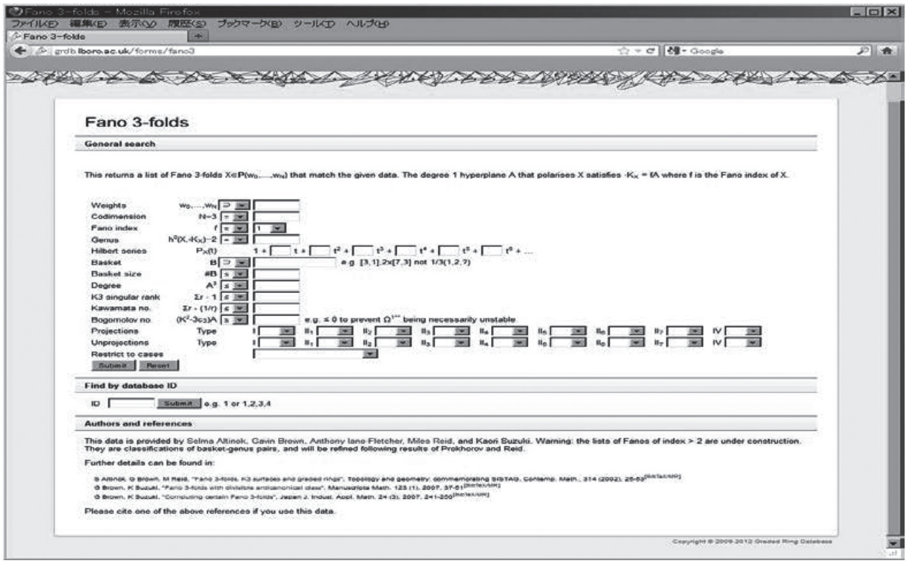
```
f=3;

Basket: [ 5, 1 ] // 特異点が1/5(3,1,5-1)つまり1/5(1,2,3)ただ一つであることを示す

Weights: [ 1, 1, 2, 3, 3, 5 ] // 重みつき射影空間の重み

Degree: 2/5   // A^3の値

Numerator: t^12 - 2*t^6 + 1
                          // 下のHilbert多項式に上で得られた重みを掛けて得ら
                          // れた式, これによりXの定義方程式の次数がわかる

Hilbert series:   //  通分した形なのでこのままでは因子の次数が分からない


(t^5 - t^4 + t^3 + t^2 - t + 1)/(t^8 - 3*t^7 + 3*t^6 -t^5 - t^3 + 3*t^2 - 3*t + 1)


Coeffs:  //  Hilbert多項式のt^nの各係数.Magma Version2.18ではFanocoeff
         //  という関数としてパッケージングされている

 [ 26/15, 49/15, 33/5, 161/15, 53/3, 132/5, 569/15, 799/15, 357/5, 283/3,
                                      1816/15, 763/5, 2849/15, 3481/15, 281 ]
```

得られた結果は実際にHilbert多項式をhとして,

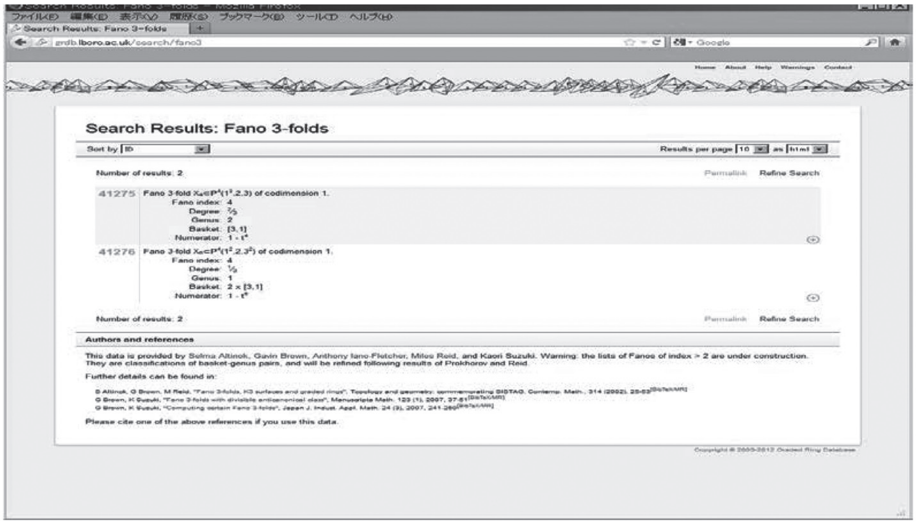
```
>h*(1-t)^2*(1-t^2)*(1-t^3)^2*(1-t^5);
t^12 - 2*t^6 + 1
```

つまり$h=1-2t^6+t^{12}/(1-t)^2(1-t^2)(1-t^3)^2(1-t^5)$と確かめられる．以上の計算により，ただ一つの特異点[5, 1]を持つFano指数3の3次元Fano多様体は，重みつき射影空間への埋め込みの余次元が2の完全交差（[IF]）$X_{6,6}\in\mathbb{P}^4(1, 1, 2, 3, 3, 5)$と同値であることが示されている．

現在Loughborough大学のG.Brown氏の協力により，氏のHP上で全てのFano指数に対し，3次元Fano多様体の取りうる全ての特異点の組$\mathcal{B}$の候補（存在性が未確認のものも含む）と付随するデータが広く一般に公開され，Magmaソフトを所持していない者であっても利用が可能になっている．



上の画面で例えば$f=4$，codim$=1$と入力することで次の画面のようなデータが得られる．



４．今後について

すべてのFano指数fについて特異点の組と付随するデータをまとめ，データベースの構築を行ったが，その総数は41435である．$f \geq 2$の条件のもとでも1885と膨大な数があり，現在もそれらのデータ解析および更新が進められている．最近，個々の数値を実際に比較することにより次のAlexeevの結果が補正されることがわかった．

命題１．（[Al，補題2.1.3]）

３次元$\mathbb{Q}$-*Fano*多様体Xとその特異点の組$\{[r_i, a_i]\}$に対し次が成り立つ

(1) $h^0(\mathcal{O}_X(-K_X)) > \frac{1}{2}(-K_X)^3 - 1$,

(2) 特に各$r_i \neq 2$のとき，$h^0(\mathcal{O}_X(-K_X)) > \frac{1}{2}(-K_X)^3$.

実際には$1/2$よりも若干大きな$390/704$で成立する[Su2].

これにより「３次元Fano多様体Xで$|-K_X| \neq \emptyset$を満たすもの」として最大で（実際には存在しないのも含め）348の新たな知見が得られた．この結果は更に$|-K_X|$がDu val特異点のみ，またはconic束のみをもつ新しいXの発見につながるものと思われ，今後とも研究を続けていきたいと考えている．

参　考　文　献

[Al] V.Alexeev, *General elephants for $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds*, Compos.Math. **91** (1994), 91–116.

[BS] G.Brown, K.Suzuki, *Lists of examples and Magma code* available for download at http://grdb.lboro.ac.uk/forms/fano3

[CB] J.Cannon and W.Bosma (eds.), *Discovering Mathematics with Magma*, Springer-Verlag (2006).

[IF] A.R. Iano-Fletcher, *Working with weighted complete intersections*, in *Explicit birational geometry of 3-folds* (eds A.Corti, M.Reid), LMS Lecture Note Ser. **281**, CUP (2000), 101–173.

[IP] V.A. Iskovskikh, Yu.G. Prokhorov, *Fano Varieties*, Algebraic geometry V, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **47**, Springer-Verlag, Berlin, (1999).

[K] Y.Kawamata, *Boundedness of $\mathbb{Q}$-Fano Threefolds*, Contemp. Math. **131** (1992), 439–445.

[Mag] W.Bosma, J.Cannon, C.Playoust, *The Magma algebra system I: The user language*, J. Symb. Comp. **24** (1997) 235–265.

[PR] Yu.Prokhorov, M.Reid, On *$\mathbb{Q}$-Fano threefolds of Fano index 2*, preprint.

[R] M.Reid, *Young person's guide to canonical singularities*, in Algebraic Geometry (Bowdoin 1985), ed. S. Bloch, Proc. of Symposia in Pure Math. **46**, A.M.S. (1987), vol. 1, 345–414.

[Su1] K.Suzuki, *On $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds with Fano index* ≥ 9, Manuscripta Mathematica **114** (2004), Springer, 229–246.

[Su2] K.Suzuki, *On Codim* 5 *Fano 3-folds with higher Fano index*, in progress.

〔すずき　かおり　横浜国立大学経営学部准教授〕

〔2012年10月１日受理〕