

不完備情報下の期間構造

森 田 洋

1. はじめに

利子率の期間構造の動的プロセスを明らかにすることは様々な目的で行動する市場参加者にとって重要である。たとえばその目的には金融資産や派生商品の評価、ポートフォリオ配分やALM管理等におけるリスク管理、政府による効率的な国債管理政策、金融当局による有効な金融政策の実行などがある。このため期間構造のダイナミクスを調べるために今まで豊富な種類のモデルが多くの研究者によって提示されており、その文献は膨大なものとなっている。

最近の期間構造の研究における興味深い報告の一つとして、金利の非定常性に関する議論がある。例えばKoeda (2011) では長短金利がいわゆる単位根を持ち定常的でないことを指摘している。その上で短期金利の1階の差分が平均回帰的なプロセスに従う期間構造モデルを考え実際のデータにそれがよくあてはまることが示されている。連続時間の枠組みとなると完備情報を前提とする限り、金利の差分が平均回帰過程に従うことを定式化するのは難しい。本論文は情報に関する不完備性を導入することにより、完備情報の下では困難な上記の性質を持つ連続時間期間構造モデルの構築を実現することを目的としている。

不完備情報の下での均衡モデルの研究は古くから行われている。例えばDetemple (1986) はCIR型一般均衡モデルにおいて生産技術を表すファクターが観測不可能な不完備情報経済を考え、その下で資産価格がどのように決定されるかを議論している。Dothan and Feldman (1986) やFeldman (1989) でも同様の設定でCIR型一般均衡モデルを利用し、市場均衡における期間構造について議論している。純粋交換経済を考え外生的な国内総生産の成長率に関するファクターを観測不可能とする不完備情報経済において期間構造を議論したものにはRiedel (2000) がある。本論文でも不完備情報を仮定するものの、CIR型の一般均衡モデルや純粋交換経済モデルは考えない。ここでは短期金利の瞬時的期待変化量を1つのファクターとしてそれが観測不可能である債券市場を考える部分均衡分析を行う。すなわち短期金利の水準は観測できるがその上昇あるいは下落トレンドは直接観測できないという情報の不完備性を考える。また代表的投資家を考える代わりに債券市場に一定の目的関数を持つアービトレージャーが存在することを仮定し、裁定機会を排除する整った債券価格体系が成立するとする。

本論文で得られた結果は以下のとおりである。まず第1に適当なパラメータの下で1990年代後半の日本の期間構造モデルを再現可能であることが示唆された。この時期の日本の期間構造

の一つの特徴は時点が異なるごとに長期金利が大きく異なることである。ファクターが平均回帰的な性質を持つ標準的な期間構造モデルではこのような期間構造は生成できない。なぜならば長期金利に対してはファクターの影響は小さくファクターの実現値が大きく異なった2つの状況間でも長期金利はほぼ等しい水準となってしまうからである。本論文のように金利が非定常的なモデルではこの点が克服される。第2にKoeda (2011) において提案されている期間構造モデルの連続時間版に対応するモデルが生成できた。上述のとおり、金利の差分が平均回帰的な性質を持つモデルは、連続時間の枠組みの中では完備情報の下で構築することが難しいが、本論文におけるモデルではパラメータの条件が整えば短期金利の差分が平均回帰的となり、またこの金利の差分がファクターとなる期間構造モデルが構築できる。すなわち不完備情報という理論的要素が金利の1階の差分が定常的となる仕組みを作り上げるという新しい見方を提供することができたといえる。

本論文の構成は以下のとおりである。まず次の節でモデルを説明し、続く3節でアービトラージャーの最適化問題を含めここで考える債券市場の数学的定式化について触れる。4節では市場均衡における期間構造を導出する。5節において得られた期間構造モデルの特徴を説明し最後の節でまとめを述べる。

2. モデル

確率空間が (Ω, \mathcal{F}, Q) で与えられているとする。時間を表す数直線は $[t_0, \infty)$ である。2次元標準ブラウン運動 $Z_t^\top = [Z_{1t}, Z_{2t}]$, $t \geq t_0$ が与えられていて、 Z_{1t} と Z_{2t} は互いに独立であるとする。このブラウン運動によって生成されるフィルトレーションを $\{\mathcal{F}_t: t \geq t_0\}$ で表すことにする。ショートレートすなわち残存期間が無限に0に近い短期金利の確率過程が確率微分方程式、

$$dr_t = \theta_t dt + \sum_r^\top dZ_t \quad (1)$$

によって与えられているとする。ただし $\Sigma_r^\top = [\Sigma_{r1}, \Sigma_{r2}]$ であり、 Σ_{r1} と Σ_{r2} は定数である。また θ_t は確率微分方程式、

$$d\theta_t = \kappa(\bar{\theta} - \theta_t)dt + \sum_\theta^\top dZ_t \quad (2)$$

で表される確率過程に従う。 $\Sigma_\theta^\top = [\Sigma_{\theta1}, \Sigma_{\theta2}]$ であり、 $\Sigma_{\theta1}$ と $\Sigma_{\theta2}$ は定数である¹。

本論文では情報が不完備であり、市場参加者にとって θ_t が観測不可能であるとする。したがって市場参加者にとって観測可能な確率変数は唯一ショートレートの実現値のみである。フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t^r: t \in [t_0, \infty)\}$ をショートレートの過去から現在に至るまでの実現値の履歴から生成された σ -加法族によって定義されるものとする。市場参加者にとっての情報集合はこのフィルトレーションで記述される。

市場参加者が利用可能な情報をもとに推定する θ_t の条件付き期待値を m_t と表すことにしよう。すなわち $m_t = E[\theta_t | \mathcal{F}_t^r]$ である。また θ_t の推定において認識される推定誤差を ϕ_t で表す

¹ た離散時間モデルにおいて確率過程 $\{r_t: t \in [t_0, \infty)\}$ はARIMA(1,1)に従うことを意味する。

ことにする. すなわち $\phi_t = E[(\theta_t - m_t)^2 | \mathcal{F}_t^r]$ である. さらに本論文では連続時間フィルタリング理論を利用するための重要な仮定として初期時点の t_0 において θ_{t_0} は正規分布に従う, すなわち $\Pr(\theta_{t_0} \leq x | \mathcal{F}_{t_0}^r)$ は正規分布関数となることを仮定する.

本論文では市場参加者はアービトレージャーであるとし, 次の目的関数を各時点 $t \geq t_0$ で最大化するように行動するとする².

$$E[dW_t | \mathcal{F}_t^r] - \frac{\alpha}{2} \text{Var}[dW_t | \mathcal{F}_t^r]$$

ただし W_t はアービトレージャーの運用資産額であり, α はアービトレージャーの危険回避度である. 市場にはこのアービトレージャーのみしか存在しないことを本論文では仮定するが, これは分析を簡単にするためである. 一般には債券市場における市場参加者にはアービトレージャーの他にポートフォリオ運用の一環として債券投資を行うトレーダーがいる. この投資家層を加えてモデルを分析すれば, 実際の債券市場に近い市場を描くことができ興味深い. ただ投資家に2つのタイプが存在することになるとモデルは著しく複雑となり異質的な投資家が存在する場合の市場均衡を扱わなくてはならない. 本論文では研究の主眼は情報の不完備性でありその影響を明確にすることにあるので, 本論文では投資家の異質性は導入しないことにする.

市場では各残存期間 τ のデフォルトリスクがなく額面が1の割引債が各時点で取引されていることを仮定し, 時点 t におけるその価格を $P_{t,\tau}$, $\tau \geq t$ で表すことにしよう. 債券価格は市場参加者の出す売買注文によって市場均衡として決定されると考えるので $P_{t,\tau}$ は \mathcal{F}_t^r - 可測となる. またこの債券の供給量はいかなる残存期間 τ の債券とも任意の時点で n であるとする. これは後の節で債券価格モデルを斉時的なものとして扱うためである. 国債管理政策などを議論する上では債券供給量は残存期間ごと, 発行年ごとに異なることを許して分析することが重要と考えられるが, 本論文の焦点は国債管理政策にはないので簡単化のためにすべての債券の供給量は同一の量であると仮定する.

3. アービトレージャーの最適化問題

$x_{t,\tau}$ を残存期間 τ の債券に対する時点 t でのアービトレージャーのポジション額と定義しよう. この表記を用いて我々のモデルを数学的に記述すると次のようになる.

- ・ 経済の状態推移を表すプロセス

$$dr_t = \theta_t dt + \sum_r^\top dZ_t \quad (3)$$

$$d\theta_t = \kappa(\bar{\theta} - \theta_t)dt + \sum_\theta^\top dZ_t \quad (4)$$

- ・ アービトレージャーの最適化問題

$$\max_{\{x_{t,\tau}\}_{t \in [t_0, \infty)}} E[dW_t | \mathcal{F}_t^r] - \frac{\alpha}{2} \text{Var}[dW_t | \mathcal{F}_t^r] \quad (5)$$

² もちろんこの目的関数はアービトレージャー特有のものではなく, 様々なタイプの裁定取引を促すものでもない. ただこの目的関数の下でアービトレージャーが取引を行えば, 同一時点での異なる満期の債券間で裁定が不可能となるような整った価格体系が成立することになる. 後に明らかになるように, この目的関数を最大化するようアービトレージャーが取引を行うことで標準的な無裁定条件に相当する条件が得られる.

$$s.t. dW_t = \left(W_t - \int_0^\infty x_{t,\tau} d\tau \right) r_t dt + \int_0^\infty x_{t,\tau} \frac{dP_{t,\tau}}{P_{t,\tau}} \quad (6)$$

$$\{P(t, \tau): t \geq t_0\} \text{は } \mathcal{F}_t^r \text{-可測な確率過程である} \quad (7)$$

・需給一致の条件

$$x_{t,\tau} = n, \tau \geq t \quad (8)$$

3つの箇条書きにおける後者2つは市場均衡の記述である。アービトレージャーの直面する各時点 t における最大化問題において重要な入力変数はその時点におけるショートレートの水準および $\frac{dP_{t,\tau}}{P_{t,\tau}}$ で表される債券の収益率である。債券の収益率を最大化問題で利用するとき必然的に債券の価格プロセスの情報が必要となる。ところが債券価格は各時点において市場均衡により決定されるので、市場参加者にとって利用可能な情報にのみ依存する構造を持つはずである。だが、本論文のモデルにおいては状態変数 θ_t は市場参加者にとって観測不可能であるため、この変数に依存させた構造を債券価格は持ちえない。あくまでも債券価格は \mathcal{F}_t^r -可測な過去のショートレートの履歴 $\{r_s: s \leq t\}$ に依存する対応関係を持つはずであるが、現段階ではその対応がどのような形をとるのか、より具体的にはマルコフ性を持つ変数によって状態を表現できてその関数として債券価格が表現可能なのかといったことが不明のままである。このため、上記の記述のままではマルコフ性を持つ状態変数に債券価格を依存させる標準的なアプローチから債券の均衡価格を求めることは望めない。だが幸いにも、上記の経済と同じ債券価格を与える仮想上の完備情報経済を想定し、マルコフ過程に従う状態変数を用いた標準的なアプローチから市場均衡価格を求めることができる。その鍵となるのが次の命題である。

命題1 確率分布 $\Pr(\theta_{t_0} \leq x | \mathcal{F}_{t_0})$ が正規分布 $N(m_{t_0}, \phi_{t_0})$ の分布関数であることを仮定すると次が成立する。

(a) 任意の $t > t_0$ において $\Pr(\theta_t \leq x | \mathcal{F}_t^r)$ は正規分布 $N(m_t, \phi_t)$ の分布関数となっている。

(b) 確率過程 $\{\tilde{Z}_t: t \geq t_0\}$ を $d\tilde{Z}_t = \frac{1}{\sqrt{\Sigma_r^\top \Sigma_r}}(dr_t - m_t dt)$ によって定義すると、 m_t, ϕ_t は次の方程式の一意かつ連続かつ \mathcal{F}_t^r -可測な解となっている。

$$dm_t = \kappa(\bar{\theta} - m_t)dt + \frac{\Sigma_r^\top \Sigma_\theta + \phi_t}{\sqrt{\Sigma_r^\top \Sigma_r}} d\tilde{Z}_t \quad (9)$$

$$d\phi_t = \left[\Sigma_\theta^\top \Sigma_\theta - 2\kappa\phi_t - \frac{(\Sigma_r^\top \Sigma_\theta + \phi_t)^2}{\Sigma_r^\top \Sigma_r} \right] dt \quad (10)$$

(c) 確率過程 $\{\tilde{Z}_t: t \geq t_0\}$ は標準ブラウン運動過程であり、これにより生成される σ -加法族 $\mathcal{F}_t^{r, \theta, \tilde{Z}}$ と \mathcal{F}_t^r は同一である。

上記の命題の(a) (b) (c)はLipster and Shiryaev (2001)の定理11.1, 定理12.1, 定理12.5を各々適用することにより得られる。

完備情報の経済であるならば時点 t の状態を表すのは \mathcal{F}_t を生成する $\{Z_s: s \leq t\}$ という情報で

ある. これに対して本論文における不完備情報の経済の場合には, 先にも触れたとおり \mathcal{F}_t^r を生成するのはショートレートの過去の履歴 $\{r_s: s \leq t\}$ である. 過去の履歴すべてを利用することしかわかっていないならば, マルコフ性を持つ状態変数を利用したアプローチが不可能である. 上記の命題はこの部分において重要な役割を果たす. すなわち, 命題の(c)より \mathcal{F}_t^r と $\mathcal{F}_t^{r, \omega, Z}$ は同一であるので, 後者の σ -加法族を生成するブラウン運動の履歴 $\{Z_s: s \leq t\}$ によって経済の状態が表現されているということが出来る. さらに命題(b)より, このブラウン運動の履歴は θ_t に対する推定値 m_t の履歴 $\{m_s: s \leq t\}$ でも同一の情報を生成することがわかる. さらに再び命題(b)よりプロセス $\{m_t: t \geq t_0\}$ はマルコフ性を持つこともわかり, 最終的には r_t, m_t, ϕ_t の3変数が経済の状態を表す変数と結論できるのである³.

より直感的な説明を試みよう. もしも θ_t が観測可能であり不完備情報の経済となっているならば, 経済の推移を表す時点 t における状態変数はそのマルコフ性より r_t と θ_t となるはずである. だが本論文のモデルにおいては θ_t が観測不可能であるため経済の推移を表す状態変数は r_t と “ θ_t に関する情報” となる. θ_t は正規分布に従うため分布に関する情報は1次のモーメントと2次のモーメントで十分であるがそれが m_t と ϕ_t である. したがって不完備情報の経済である本論文のモデルにおいて状態変数となるのは r_t, m_t, ϕ_t の3変数であるということが出来るのである.

以上より経済の数学的記述はマルコフ性を持つ状態変数を利用したアプローチが可能な次の記述に表現しなおすことができる.

命題2 本モデルにおける経済の数学的記述は次のように表現しなおすことができる.

- ・経済の状態推移を表すプロセス

$$dr_t = m_t dt + \sqrt{\Sigma_r^T \Sigma_r} d\bar{Z}_t \quad (11)$$

$$dm_t = \kappa(\bar{\theta} - m_t)dt + \frac{\Sigma_r^T \Sigma_\theta + \phi_t}{\sqrt{\Sigma_r^T \Sigma_r}} d\bar{Z}_t \quad (12)$$

$$d\phi_t = \left[\Sigma_\theta^T \Sigma_\theta - 2\kappa\phi_t - \frac{(\Sigma_r^T \Sigma_\theta + \phi_t)^2}{\Sigma_r^T \Sigma_r} \right] dt \quad (13)$$

- ・アービトレージャーの最適化問題

$$\max_{\{x_{t,\tau}\}_{\tau \in [t, \infty)}} E[dW_t | \mathcal{F}_t^{r, \omega, Z}] - \frac{\alpha}{2} \text{Var}[dW_t | \mathcal{F}_t^{r, \omega, Z}] \quad (14)$$

$$s.t. dW_t = \left(W_t - \int_0^\infty x_{t,\tau} d\tau \right) r_t dt + \int_0^\infty x_{t,\tau} \frac{dP_{t,\tau}}{P_{t,\tau}} \quad (15)$$

$$\{P(t, \tau): t \geq t_0\} \text{ は } \mathcal{F}_t^{r, \omega, Z} \text{ - 可測な確率過程である} \quad (16)$$

- ・需給一致の条件

$$x_{t,\tau} = n, \tau \geq t \quad (17)$$

特に注意すべきは, この記述によって本論文におけるモデルは形式的に, 出発点において不確実性をブラウン運動過程 $\{\bar{Z}_t: t \geq t_0\}$ により記述し, m_t, ϕ_t が状態変数である完備市場経

³ 後の節で明らかになるが実際 m_t はショートレートの過去の履歴を1つの数字に集約した変数となっている

済と見なすことができる点である。以下ではこの記述を利用して債券の市場均衡価格を求めていくことにしたい。

4. 斉時的モデルにおける期間構造

ϕ_t に関する方程式である(10)式はいわゆるリッカチ方程式を意味し、その解は初期値 ϕ_{t_0} を所与とすると次のように与えられる。

$$\phi_t = \frac{\bar{\phi} - \underline{\phi} \frac{\phi_{t_0} - \bar{\phi}}{\phi_{t_0} - \underline{\phi}} e^{-2\kappa^*(t-t_0)}}{1 - \frac{\phi_{t_0} - \bar{\phi}}{\phi_{t_0} - \underline{\phi}} e^{-2\kappa^*(t-t_0)}} \quad (18)$$

ただし $\kappa^* = \sqrt{\kappa + 2\kappa \frac{\sum_r^\top \sum_\theta}{\sum_r^\top \sum_r} + \frac{\sum_\theta^\top \sum_\theta}{\sum_r^\top \sum_r}}$, $\bar{\phi} = -\sum_r^\top \sum_\theta + \sum_r^\top \sum_r (\kappa^* - \kappa)$, $\underline{\phi} = -\sum_r^\top \sum_\theta + \sum_r^\top \sum_r (-\kappa^* - \kappa)$ である。

非確率的ではあるが推定誤差 ϕ_t は一般には時間とともに変動する。だが(18)式より ϕ_t は $\bar{\phi}$ に収束する、つまり十分時間が経過した後は推定誤差はほぼ $\bar{\phi}$ に等しくなることがわかる。このことより、一つには単純化を理由として、もう一つには後の節においてあいまいさを残すことなく m_t とショートレート間の関係を明らかにしたいため、次の仮定を設けることにする。

仮定1 推定誤差の初期値に関して次の等式が成立することを仮定する。

$$\phi_{t_0} = \bar{\phi} \quad (19)$$

(18)式より、仮定1の下では明らかにすべての $t \geq t_0$ に対し $\phi_t = \bar{\phi} = -\sum_r^\top \sum_\theta + \sum_r^\top \sum_r (\kappa^* - \kappa)$ が成立することとなる。以下では表記を簡潔にするために次のように σ_r , σ_m を定義しよう。

$$\sigma_r = \sqrt{\sum_r^\top \sum_r}$$

$$\sigma_m = \frac{\sum_r^\top \sum_\theta + \bar{\phi}}{\sqrt{\sum_r^\top \sum_r}}$$

債券の供給量は時間に依存することなく一定であるので、仮定1が置かれると経済は斉時的となり市場均衡における債券価格は時間 t には依存しなくなる。そこで債券価格が次の形となることを推測して均衡価格を求めることとしよう。

$$P_{t,\tau} = P(r_t, m_t, \tau)$$

$$= \exp(A(\tau) + B_r(\tau)r_t + B_m(\tau)m_t)$$

但し、 A , B_r , B_m は τ にのみ依存する関数である。この関数形の下では、(15)式で表されるアービトレージャーの資産のプロセスは次の式に表現を改めることができる。

$$dW_t = \left[W_t r_t + \int_0^\infty x_{t,\tau} (\mu_{t,\tau} - r_t) d\tau \right] dt + \left[\int_0^\infty x_{t,\tau} (B_r(\tau) \sigma_r + B_m(\tau) \sigma_m) d\tau \right] d\tilde{Z}_t$$

ただし $\mu_{t,\tau}$ は債券の瞬時的収益率の条件付期待値を表すものであり、伊藤の補題より

$$\begin{aligned} \mu_{t,\tau} = & B_r m_t + B_m k(\bar{\theta} - m_t) + \frac{1}{2} B_r^2 \sigma_r^2 + \frac{1}{2} B_m^2 \sigma_m^2 + B_r B_m \sigma_r \sigma_m \\ & - A'(\tau) - B_r'(\tau) r_t - B_m'(\tau) m_t \end{aligned}$$

となっている。以上よりアービトレージャーの最適化問題における目的関数部分は次の形に表現しなおすことができる。

$$\max_{\{x_{t,\tau} | \tau \in [0, \infty)\}} \int_0^\infty x_{t,\tau} (\mu_{t,\tau} - r_t) d\tau - \frac{a}{2} \left[\int_0^\infty x_{t,\tau} (B_r(\tau) \sigma_r + B_m(\tau) \sigma_m) d\tau \right]^2$$

そこで $x_{t,\tau}$, $\tau \geq t$ に関する 1 階の条件を求めると

$$\begin{aligned} 0 = & \mu_{t,\tau} - r_t \\ & - a \left[\int_0^\infty x_{t,s} (B_r(s) \sigma_r + B_m(s) \sigma_m) ds \right] (B_r(\tau) \sigma_r + B_m(\tau) \sigma_m), \tau \geq t \end{aligned}$$

を得る。この条件に需給一致の条件 $x_{t,\tau} = n$, $\tau \geq t$ を代入することで市場均衡における債券価格が満たす条件が求まる。

$$\mu_{t,\tau} - r_t - \lambda (B_r(\tau) \sigma_r + B_m(\tau) \sigma_m) = 0, \tau \geq t \quad (20)$$

ただし λ は $\lambda = an \left[\int_0^\infty (B_r(s) \sigma_r + B_m(s) \sigma_m) ds \right]$ として定義される定数である。この λ はいわゆるリスクの市場価格に対応するパラメータである。本論文では市場均衡から債券価格を求めているため、無裁定条件の下で債券価格を求めるアプローチの場合に外生変数となるリスクの市場価格はここでは内生的に求められている。その決定要素はアービトレージャーのリスク回避度と債券価格のリスクエクスポージャー $B_r(s)$, $B_m(s)$ およびファクターのリスクの大きさを表す σ_r , σ_m となっていて、いずれの変数が絶対値の意味で大きくなってもリスクの市場価格のサイズは大きくなるという直感に合う性質を持っている。

上述の均衡条件は数学的には常微分方程式問題に帰着させることができ、市場均衡における瞬時的フォワード・レート $f(r_t, m_t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \ln P(r_t, m_t, \tau)$ は次のように求めることができる。

命題3 市場均衡における瞬時的フォワードレートは次で与えられる。

$$f(r_t, m_t, \tau) = r_t + \frac{1-e^{-\kappa\tau}}{\kappa} m_t - \lambda\sigma_r\tau + \left(\bar{\theta} - \frac{\lambda}{\kappa}\sigma_m\right) \left(\tau - \frac{1-e^{-\kappa\tau}}{\kappa}\right) - \frac{1}{2}\sigma_r^2\tau^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_m}{\kappa}\right)^2 \left(\tau - \frac{1-e^{-\kappa\tau}}{\kappa}\right)^2 - \frac{\sigma_r\sigma_m}{\kappa} \left(\tau - \frac{1-e^{-\kappa\tau}}{\kappa}\right)\tau \quad (21)$$

証明は数学付録を参照されたい。右辺第1項および第2項は金利予想に関する部分、第3項と第4項はリスクプレミアム、残りの項がコンベクシティ（言い換えるとJensenの不等式効果）の項である。次の節においてはこの期間構造モデルがどのような性質を持つのかを考察していくこととする。

5. 均衡における期間構造の性質

5.1 90年代後半における日本の期間構造に対する説明力

図1

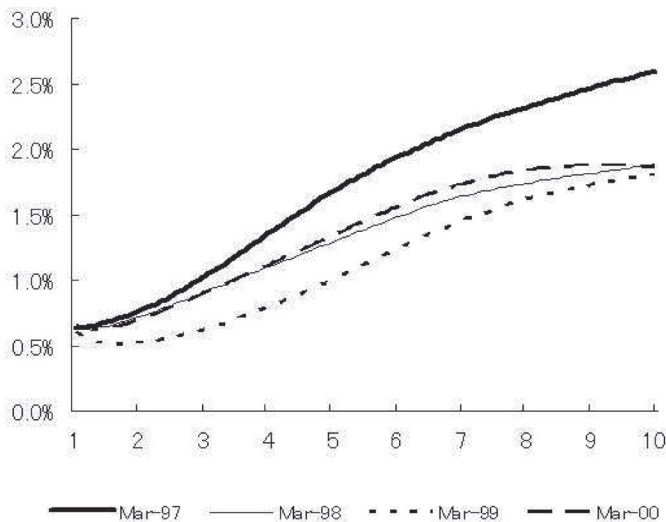
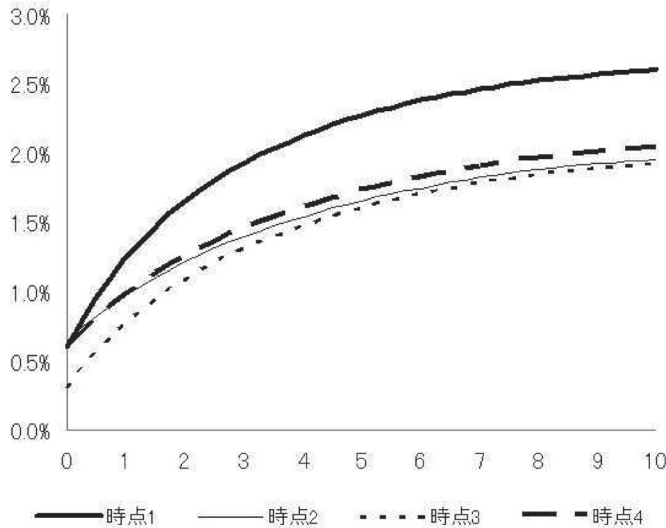


図1は1990年代後半における年次の期間構造を図示したものである。この期間構造の大きな特徴は第1に2つの年度で比較したときに短期ゾーンで金利がほぼ同じでも長期金利が異なることがあるということである。具体的には97年度とその他の年度との間で比較してみると短期金利はほとんど同一であるが中長期ゾーンで金利が異なる水準となっている。このような期間構造はファクターが一つの期間構造モデルでは描くことができない。

第2に、長期金利が年によって大きく異なっている。より具体的には97年の長期金利が他の年の長期金利と大きく異なっている。このような期間構造はショートレートやその他のファクターが平均回帰的な性質を持つ典型的な期間構造モデルでは表現しにくい。これらのモデルで

は短期金利等ファクターは長期的には平均回帰水準に収束し、それが遠い将来における金利に対する予想となって期間構造に反映されるため、ファクターの値が大きく異なってもその長期金利への影響は小さい、つまりファクターの値の違いが長期金利にはほとんど表れないからである。

図2



前節で求めた期間構造モデルの場合、上述の2点を特徴にもつ期間構造を描くことができる。ここでは各パラメータは $\bar{\theta} = 0$, $\kappa = 0.6$, $\sigma_r = 0.007$, $\sigma_m = 0.005$, $\lambda = -0.1$ と設定してみた。4つの期間構造を考えるため各々時点1, 時点2, 時点3, 時点4というインデックスをつけ、そのファクターの値を、時点1が $r = 0.6\%$, $m = 0.74\%$, 時点2が $r = 0.65\%$, $m = 0.32\%$, 時点3が $r = 0.3\%$, $m = 0.51\%$, 時点4が $r = 0.6\%$, $m = 0.4\%$ とした。この数字のもとで求めた期間構造が図2である。ファクターが2つの期間構造であるため、先述の特徴の第1点である短期金利が等しくても中・長期金利が異なる値をとる期間構造になっているが、さらに第2点の特徴である長期金利が時点ごとに大きく異なる値をとる特徴もあわせもっている。図1と図2ではもちろん曲線の形状に若干の違いが表れるが大方似た形となっている。ただ以上の議論はモデルの重要な側面である不完備情報には直接関係なく、ショートレートが平均回帰構造を持たないマルチファクターモデルの持つ性質故に得られるものである。次の節では不完備情報によってもたらされる特異な期間構造の特徴について議論することにしよう。

5.2 1階の差分が自己回帰過程に従う金利モデルの生成

実際の金利データを調べてみると、必ずしも金利の時系列データが定常的であるとは限らない。特にアメリカのデータでは短期金利、長期金利ともいわゆる単位根を持ち、定常的な時系列となっていないことが報告されている。本論文のモデルでも平均回帰的な性質を持たないためにショートレートが非定常的なモデルとなっていることは容易に理解できるが、この点につ

いてさらに詳しく見ることにしたい。

$\bar{\phi}$ の定義によりパラメータ κ^* は、

$$\kappa^* = \kappa + \frac{\sum_r^\top \sum \theta + \phi_t}{\sum_r^\top \sum r}$$

と表されるので、(11)式を(12)式に代入することにより \bar{Z}_t を消去すると次の方程式を得ることができる。

$$dm_t = (\kappa \bar{\theta} - \kappa_t^* m_t) dt + (\kappa^* - \kappa) dr_t$$

上記の方程式は確率微分の表現である。これを積分方程式の形にすると次のとおりとなる。

$$m_t = m_{t_0} e^{-\kappa^*(t-t_0)} + \bar{m} (1 - e^{-\kappa^*(t-t_0)}) + (\kappa^* - \kappa) \int_{t_0}^t e^{-\kappa^*(t-u)} dr_u \quad (22)$$

ただし $\bar{m} = \left(\frac{\kappa}{\kappa^*}\right) \bar{\theta} + \left(1 - \frac{\kappa}{\kappa^*}\right) \frac{\sum_r^\top \sum r}{2}$ である。すなわちショートレートの局所的期待変化量に対する投資家の θ_t に対する推定値 m_t は過去のショートレートの変化の加重平均という形で過去のショートレートの履歴によって決定されている。

(22)式左辺第3項の積分は部分積分の公式により次のように書き直すことができる。

$$\int_{t_0}^t e^{-\kappa^*(t-u)} dr_u = r_t - e^{-\kappa^*(t-t_0)} r_{t_0} - \int_{t_0}^t \kappa^* e^{-\kappa^*(t-u)} r_u du$$

この結果(22)式は次の形となる。

$$m_t = m_{t_0} e^{-\kappa^*(t-t_0)} + \bar{m} (1 - e^{-\kappa^*(t-t_0)}) + (\kappa^* - \kappa) \left[(r_t - e^{-\kappa^*(t-t_0)} r_{t_0}) - \int_{t_0}^t \kappa^* e^{-\kappa^*(t-u)} r_u du \right] \quad (23)$$

ここでモデルを定常的なものとするために $t_0 \rightarrow -\infty$ としてみよう。このとき(23)式は次の形をとる。

$$m_t = \bar{m} + (\kappa^* - \kappa) \left[r_t - \int_{-\infty}^t \kappa^* e^{-\kappa^*(t-u)} r_u du \right] \quad (24)$$

すなわち $t_0 \rightarrow -\infty$ とすることで初期値の影響をなくすと θ_t の推定値である m_t は推定値の定常的水準 \bar{m} および直近のショートレートの水準が過去のショートレートの加重平均をどれだけ超過しているかという2つの要素によって決定される。直近のショートレートが過去の平均と等しく超過水準が0の場合には推定値は \bar{m} と一致する。直近のショートレートが平均を超過しているときにはこの定常水準よりも高くなり、逆に超過量がマイナスのときには定常水準よりも低くなる。

さて、(24)式右辺第2項の括弧の中身におけるショートレートの過去の加重平均 $\kappa^* \int_{-\infty}^t r_u e^{-\kappa^*(t-u)} du$ は κ^* が大きな値になるにつれて直近のショートレートの値に大きな重みをおいた加重平均となるため、 $\kappa^* \rightarrow \infty$ となると積分部分は直近のショートレートの水準にほぼ対応することになる。したがって $r_t - \kappa^* \int_{-\infty}^t r_u e^{-\kappa^*(t-u)} du$ は直近のショートレートの変化を表すものになると推測することができる。

より直観的に理解するためにこれを離散近似を行って確認してみよう。離散近似を行うと“超過水準”は $r_t - \kappa^* \sum_{i=1}^{\infty} r_{t-i} \frac{1}{(1+\kappa^*)^i}$ と表すことができる。そこで $\kappa^* \rightarrow \infty$ とすると

$$\begin{aligned} r_t - \lim_{\kappa^* \rightarrow \infty} \kappa^* \sum_{i=1}^{\infty} r_{t-i} \frac{1}{(1+\kappa^*)^i} &= r_t - \lim_{\kappa^* \rightarrow \infty} r_{t-1} \frac{1}{\frac{1}{\kappa^*} + 1} + \lim_{\kappa^* \rightarrow \infty} \sum_{i \geq 2} r_{t-i} \frac{1}{\frac{1}{\kappa^*} + 1} \frac{1}{(1+\kappa^*)^{i-1}} \\ &= r_t - r_{t-1} \end{aligned}$$

となり1階の差分に収束する。これと(11)式とによって次の命題を主張することができる。

命題4 κ^* が十分に大きいとき、ショートレートの確率微分方程式をオイラー近似すると次の式のとおりとなる。

$$r_{t+1} - r_t = (\bar{m} + (\kappa^* - \kappa)(r_t - r_{t-1})) + \sqrt{\sum_r^T \sum_r} \varepsilon_{t+1}$$

ただし ε_t は $N(0, 1)$ に従うホワイトノイズである。

式からわかるとおり、1次の自己回帰過程に従うのはショートレートの水準ではなく1階の差分となっている。Koeda (2011) ではアメリカの期間構造においてショートレートの水準ではなく1階の差分と長短金利差、およびGDPの変化率の3変数が平均回帰性を持つVAR(1)過程を考え、無裁定条件を満たす期間構造が実際のデータによくフィットすることが報告されている。我々のモデルも適当なパラメータの値の下ではショートレートの1階の差分が1次の自己回帰過程に従うことを意味するのであるから、本論文のモデルはKoeda (2011) における期間構造モデルの連続時間版に近いものと位置付けることができる。一般に連続時間モデルの枠組みでは完備市場の期間構造モデルにおいて1階の差分が自己回帰過程に従うモデルを構築することは難しい。この意味で不完備情報は金利が1階の差分が自己回帰過程に従うモデルを内生的に構築することが可能な重要な理論的要素ということができる。

6. まとめ

本論文では債券市場に簡単な不完備情報の仮定を設け、その下で均衡における期間構造を求めた。得られた期間構造モデルからは、適当なパラメータの下では1990年代後半の日本の期間構造を再現することが可能であることが示唆された。また1階の差分が定常的となる金利モデルの理論的基礎を提供することも明らかとなった。特に連続時間の枠組みにおいて1階の差分

が定常的となるモデルの定式化は完備情報の仮定の下では難しい。その意味で不完備情報が金利の1階の差分が定常的となる仕組みを作り上げる役割を果たすという一つの新しい見方を提供することができたといえよう。

もちろん今回の研究では実証分析は行われていない。したがって飽くまでも90年代後半の日本の期間構造の再現はその可能性が示唆されたということにとどめざるをえない。計量的なデータ分析については別の機会に譲ることにしたい。また今回生成した1階の差分が定常的となる金利モデルも一変数のものであり、Koeda (2010) のように長短金利差やGDP成長率などの他の変数を含めた多変量の期間構造モデルまでは構築できていない。その意味でモデルの構築は不完全であり、この拡張についても別の機会に譲ることとしたい。

7. 数学付録

この数学付録では命題3の証明を示す。すなわち市場均衡条件を満たす瞬間的フォワードレートを表す(21)式を導出する。債券価格が満たすべき市場均衡条件として(20)式、

$$\begin{aligned} & B_r(\tau)m_t + B_m(\tau)\kappa(\bar{\theta} - m_t) + \frac{1}{2}B_r^2(\tau)\sigma_r^2 + \frac{1}{2}B_m^2(\tau)\sigma_m^2 \\ & + B_r(\tau)B_m(\tau)\sigma_r\sigma_m - A'(\tau) - B_r'(\tau)r_t - B_m'(\tau)m_t - r_t \\ = & \lambda(B_r(\tau)\sigma_r + B_m(\tau)\sigma_m) \end{aligned} \quad (25)$$

が得られた。この等式は任意の r_t , m_t , τ に対して成立しなくてはならない。このことより、変数 r_t , m_t の1次の項および0次の項に関して整理し、その係数を0とおくことで次の常微分方程式を得る。

$$0 = -B_r'(\tau) - 1 \quad (26)$$

$$0 = B_r(\tau) - \kappa B_m(\tau) - B_m'(\tau) \quad (27)$$

$$\begin{aligned} A'(\tau) = & B_m(\tau)(\kappa\bar{\theta} - \sigma_m\lambda) - B_r(\tau)\sigma_r\lambda + \frac{1}{2}B_r^2(\tau)\sigma_r^2 \\ & + \frac{1}{2}B_m^2(\tau)\sigma_m^2 + B_r(\tau)B_m(\tau)\sigma_r\sigma_m \end{aligned} \quad (28)$$

また債券価格が自動的に満たすべき条件 $P(r_t, m_t, 0) = 1$ より境界条件として $A(0) = 0$, $B_r(0) = 0$, $B_m(0) = 0$ が与えられているので上記の微分方程式とこの境界条件によって常微分方程式問題が定義される。この問題を解くと次の解を得ることとなる。

$$B_r(\tau) = -\tau \quad (29)$$

$$B_m(\tau) = -\frac{1}{\kappa} \left(\tau - \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \right) \quad (30)$$

ところで瞬時的フォワードレートの定義 $f(r_t, m_t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \ln P(r_t, m_t, \tau)$ より

$$\begin{aligned} f(r_t, m_t, \tau) &= -A'(\tau) - B'_r(\tau)r_t - B'_m(\tau)m_t \\ &= -A'(\tau) + r_t + \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} m_t \end{aligned} \quad (31)$$

を得ることができる。右辺第1項の $A'(\tau)$ については微分方程式の解(29)式と(30)式を(28)式に代入することで得られる。

参 考 文 献

- Detemple, J., 1986, Asset Pricing in a Production Economy with Incomplete Information, *Journal of Finance* 41, 383-391.
- Dothan, M and D. Feldman, 1986, Equilibrium Interest Rates and Multiperiod Bonds in a Partially Observable Economy *Journal of Finance* 41, 369-382.
- Feldman, D., 1989, The Term Structure of Interest Rates in a Partially Observable Economy, *Journal of Finance* 44, 789-812.
- Koeda, J., 2011, How Does Yield Curve Predict GDP Growth? A Macro-Finance Approach Revisited, CARF Working Paper.
- Langtieg, T. C., 1980, A Multivariate Model of the Term Structure, *Journal of Finance* 35, 71-97.
- Lipster, R.S., and A. N. Shirayev, 2001, *Statistics of Random Process 2*, Springer-Verlag, New York.
- Riedel, F., 2000, *Imperfect Information and Investor Heterogeneity in the Bond Market*, Physica-Verlag.
- Vasicek, O., 1977, An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics* 5, 177-188.

[もりた ひろし 横浜国立大学大学院国際社会科学研究所, 経営学部教授]

[2011年8月18日受理]